هذا معجم يتضمن بيان بعض كلمات هندسية * وتفسير الفاظ اصطلاحية * ينتفع به الطلاب * وتكمل به فائدة الكتاب

حرف الالف

اسطوانة

هي جسم قاعدتاه دائرتان متوازيتان وسطحه الظاهر منحن * وارتفاع الاسطوانة هو العمود النازل من مركز القاعدة العليا على مستوى القاعدة السفلى وهذا العمود لا يمر بالمركزين الا اذا كانت الاسطوانة قائمة * ومساحة حجمها تساوي حاصل ضرب ارتفاعها في قاعدتها لان الاسطوانة يمكن ان تعتبر منشورا قاعدته مضلع مركب من عدة اضلاع صغيرة جدا

اسطوانة قائمة

هي ما كان فيها المستقيم الواصل من احد مركزي القاعدتين الى الآخر عمودا على مستوى القاعدتين

اسطوانة مائلة

هي ما كان فيها الخط المستقيم الواصل من احد مركزي القاعدتين الى الآخر مائلا على مستوى القاعدتين

امتداد

هو الفراغ المشغول باجسام محسوسة بالفعل او بالوهم كبيرة كانت او صغيرة * فامتداد البستان مثلا هو المسافة المحصورة بين حيطانه وامتداد الحوض المسافة التي بين حافاته وامتداد الدار كناية عن الفراغ المحصر بين ارتفاعه وطوله وعرضه

حرف الباء

بنطغرافة

بالباء الفارسية آلة ينقل بها كل نوع من انواع الرسم وان لم يكن للناقل معرفة بفن الرسم

حرف

حرف الجيم

جسم

هو ما احتوى على الابعاد الثلاثة الطول والعرض والعمق

حرف الخاء

خط

هو ما ليس له الابعد اواحدا وهو الطول * وهو انواع والاصول منها اربعة المستقيم والمنكسر والمنحنى والمركب

خط افقى

هو خط مستقيم يمكن رسمه على الارض اذا كانت مستوية

خط رأسى

هو خط مستقيم عمودى على الافق

خط شعاعى

هو خط مستقيم واصل من مركز الدائرة الى محيطها

خط قائم

راجع الخط الرأسى

خط مائل

هو خط يتلاقى مع خط اخر ليس عمودا عليه

خط مستدير

هو ما كانت نقطه الموضوعة فى مستو واحد على بعد واحد من نقطة الوسط المسماة مركزا

خط مستقيم

هو اقصر بعد بين نقطتين

خط مماس

هو الذى لا يمس محيط الدائرة الا فى نقطة واحدة ولو مد الى غير نهاية * ويكون عمودا على نصف القطر المار بهذه النقطة * واذا عينت نقطة

على المحيط فانه يمكن رسم خط مماس منها بان تصل نصف القطر بالنقطة المذكورة وتقيم من طرفه عمودا فهذا هو الخط المماس * وبواسطة هذه العملية يمكن عمل مضلع منتظم وذلك بان تعين خمس نقط متساوية البعد عن بعضها على محيط الدائرة وترسم من هذه النقط خمسة خطوط مماسة فتصير هذه الخطوط محيط المضلع المنتظم ذا الخمسة اضلاع الذى ينحصر فيه محيط الدائرة انحصارا كليا

خط منتصب

راجع الخط الرأسى

خط منحن

هو ماليس مستقيما ولا منكسرا

خط منكسر

هو ماتركب من خطوط مستقيمة متصل بعضها ببعض

خط نصف النهار

ويقال دائرة نصف النهار هو دائرة عظمى ترسم على الكرة وتقسمها قسمين متساويين وقاطعة لخط الاستواء * واحد القسمين يقال له شرقى والاخر غربى

خطوط متوازية

هى خطوط مرسومة فى مستو واحد لا يمكن تلاقيها ابدا ولو مدت الى غير نهاية * وذلك لان الخطوط المتوازية على ابعاد متساوية لو فرض انها تقاربت من بعضها فى بعض المحال للزم تلاقيها قريبا او بعيدا فاذن لا تكون متوازية واذا اردت ان تاخذ مقدار المسافة التى بين الخطين المتوازيين فافرض نقطة على احدهما وأنزل من هذه النقطة عمودا على الخط الآخر فطول هذا العمود هو مقدار المسافة التى بين الخطين المتوازيين

حرف الدال

دائرة

هى سطح مستو منته بخط منحن جميع نقطه على بعد واحد من نقطة الوسط

المدعوة

المسماة مركزا ونطلق ايضا على الخط المذكور الذى هو المحيط

دائرة صغرى

هى ما كان مركزها غير مركز الكرة

دائرة كبرى

هى ما كان مركزها عين مركز الكرة

حرف الزاى

زاوية

هى انفراج خطين متلاقيين فى نقطة تسمى رأس الزاوية ويسمى الخطان ضلعى الزاوية او طرفيها

زاوية حادة

هى التى تحدث من تلاقى خطين مائلين وتكون اصغر من القائمة

زاوية قائمة

هى التى تحدث من تلاقى خطين عمودين على بعضهما

زاوية منفرجة

هى التى تحدث من تلاقى خطين مائلين وتكون اكبر من القائمة

حرف السين

سطح

هو الذى لا يحتوى الا على بعدين فقط وهما الطول والعرض والسطوح انواع والاصول منها اثنان فقط وهما السطح المستوى والسطح المنحنى

سطح الدائرة

هو المسافة المنحصرة فى داخل المحيط

سطح الشكل

هو المستوى المحاط من جميع جهاته بخطوط مستقيمة او منحنية يتكون منها الشكل المذكور * واذا اردت ان تاخذ مساحة سطح اى شكل كان فضع عدة مرات على الشكل المذكور سطحا معينا لا يتغير فيكون هذا السطح حينئذ

وحدة المقياس وهي كناية عن مربع ضلعه يساوي وحدة الطول المسماة مترا * واذا اردت ان تاخذ مساحة سطح شكل متوازي الاضلاع فاضرب ارتفاعه في قاعدته * وتقويم مساحة سطح المربع الذي طول ضلعه معين يكون ايضا بضرب ارتفاعه في قاعدته المساوية لهذا الارتفاع * ومساحة سطح المثلث ايا كان تؤخذ بضرب قاعدته في نصف ارتفاعه فقط وذلك لان المثلث نصف متوازي الاضلاع فيكون سطحه مساويا لنصف سطح متوازي الاضلاع * وسطح شبيه المنحرف تؤخذ مساحته بضرب ارتفاعه في نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين لان شبيه المنحرف ينقسم بواسطة قطره الى مثلثين متحدي الارتفاع مختلفي القاعدة فآل الامر حينئذ الى اخذ مساحة هذين المثلثين * وكيفية اخذ مساحة سطح مضلع غير منتظم ان تقسم هذا المضلع الى عدة مثلثات بقدر ما يوجد من الاضلاع الا اثنين فبواسطة الاقطار المرسومة من رأس واحد الى رؤس غير متجاورة ثم خذ مقدار ارتفاع المثلثات على التوالي وقواعدها تكون مساحتها مساحة المضلع المذكور * واما مساحة سطح المضلع المنتظم فهي مساوية لحاصل ضرب محيطه في نصف قطر الدائرة الداخلة * وكيفية اخذ مساحة حجم كثير السطوح ان تحلله الى اهرام وطريقة ذلك ان تقسمه بمستويات تمر برأس زاوية مجسمة فيتحلل حينئذ الى عدة اهرام جزئية بقدر ما في كثير الاضلاع من الاوجه ما عدا الاوجه التي تتكون منها الزاوية المجسمة التي تمر منها مستويات التقسيم واذا كان كثير السطوح منتظما فان الرأس الذي تمر منه مستويات التقسيم يكون في مركز هذا الجسم يعني في نقطة الوسط التي تكون على ابعاد متساوية من جميع رؤس كثير السطوح فيكون حجم كثير السطوح مساويا لمجموع حجوم الاهرام الجزئية وبعبارة اخرى يكون مساويا لمجموع قواعد الاهرام الجزئية مضروبة في ثلث ارتفاعها المشترك

سطح محدب

هو ما لا يمكن ان يتلاقى معه الخط المستقيم الذي يمر بالجسم الا في نقطتين *

واذا كان كثير السطوح منتظما فان سطحه المحدب يتركب من مجموع سطوح متساوية يحصر بينهما الجسم وفي بعض العبارات يتركب من احد اوجه كثير السطوح المذكور مكررا عدة مرات بقدر ما يوجد من الاوجه المختلفة

سطح مختلط

هو ما كان بعضه منحنيا وبعضه مستويا * وطريق معرفته ان يمكن تطبيق مسطرة مستقيمة على احد اجزائه دون الآخر

سطح مستو

هو الذي يمكن ان ينطبق عليه خط مستقيم في سائر اقطاره وامتداده

سطح منحن

هو الذي لا يمكن ان ينطبق عليه خط مستقيم من جميع جهاته

حرف الشين

شاقول

هو خيط باحد طرفيه قطعة رصاص بها يكون مشدودا على الاستقامة

شبيه المنحرف

هو ما كان فيه ضلعان متوازيان

شقة كروية

هي جزء من سطح الكرة واقع بين نصفي دائرتين كبيرتين متقاطعين

شكل

هو مستو محاط من جميع جهاته بخطوط مستقيمة او منحنية * واقل ما يلزم في الشكل من الخطوط المستقيمة ثلاثة ويقال لها اضلاع الشكل

حرف الطاء

طوبوغرافية

اسم للتخطيط الصحيح الذي يبين بلدة مخصوصة او خطا مخصوصا او نحو ذلك * فهي اخص من الجغرافية

طيلسان

هو قطعة مجوفة من الكرة

حرف العين

عمود

هو الخط المستقيم الذى اذا تلاقى مع مثله لا يميل عليه من جهة اكثر من الاخرى * ثم ان العمود لا يكون رأسيا الا اذا كان موازيا لجهة خط الشاقول ولا يكون الخط الرأسى عمودا على الخط الذى يتلاقى معه فى سطح مستو واحد الا اذا كان هذا الخط الثانى افقيا

حرف القاف

القاسم الاعظم

هو اكبر الاعداد القاسمة المشتركة بين عدة اعداد

قاطع

هو الخط الذى يقطع محيط الدائرة

قطع الدائرة

هو جزء من الدائرة واقع بين قوس من محيطها ونصفى قطرين مارين بطرفى تلك القوس

قطع كروى

هو جسم متولد من دوران قطع يدور حول احد نصفى القطرين او حول قطر موجود فى مستوى القطع دورة كاملة

قطب

هو احد نهايتى المحور الذى يدور عليه جسم كروى

قطر الدائرة

هو المستقيم الذى يقطع الدائرة مارا بمركزها

قطر الشكل

هو المستقيم الذى يصل رأسى زاويتين غير متجاورتين والغرض من اقطار الاشكال تقسيمها الى عدة مثلثات بقدر ما يوجد من الاقطار وزيادة واحد من المثلثات

قطر الكرة

هو الخط المستقيم الذى يمر بمركز الكرة وينتهى من طرفيه بمحيطها

قطعة الدائرة

هى السطح المستوى الواقع بين القوس ووتره

قطعة كروية

هى جزء حجم الكرة الواقع بين مستويين متوازيين هما قاعدتاه

قطع مشترك

هو نقطة يتقاطع فيها خطان او خط يتقاطع فيه مستويان او سطح يتقاطع فيه جسمان

قوس

هو قطعة من المحيط منحصرة بين طرفى الوتر

حرف الكاف

كثير الاضلاع المحدب

راجع السطح المحدب

كثير الاضلاع المنتظم

هو ما كانت اضلاعه وزواياه متساوية

الكرة

هى جسم منته بسطح منحن جميع نقطه على بعد واحد من نقطة الوسط المسماة مركزا * وحجم الكرة يساوى الحاصل من ضرب ثلث نصف قطرها فى سطحها المحدب

حرف الميم

متر

هو ثلاثة اقدام تقريبا

متساوى الاضلاع

هو كل شكل استقامت اضلاعه وتساوت

متساوى الزوايا

هو كل شكل استقامت اضلاعه وتساوت زواياه

متوازى الاضلاع

هو ما كانت اضلاعه المتقابلة متوازية ومتساوية

مثلث

هو ماركب من ثلاث زوايا وثلاثة اضلاع

مثلث قائم الزاوية

هو ما كانت احدى زواياه قائمة * ولا يمكن ان تتعدد الزوايا القائمة فى المثلث لانه يلزم لتكوين الزاويتين القائمتين ان يكون ضلعان من المثلث عمودين على الثالث وينتج من ذلك ان هذين العمودين يكونان متوازيين فلا يتلاقيان اصلا فاذن لا تتكون منهما الزاوية الثالثة

محور

هو قطر الكرة التى تدور عليه وطرفاه يسميان بالقطبين

محيط الدائرة

راجع الخط المستدير

محيط الشكل

هو كناية عن مجموع اضلاعه

مخروط

هو هرم قاعدته دائرة وسطحه الجنبى منحن وارتفاعه هو العمود النازل من رأسه على سطح القاعدة * ومساحة حجم المخروط هى حاصل ضرب ارتفاعه فى ثلث قاعدته لانه يمكن اعتبار المخروط كهرم تكون قاعدته مضلعا مركبا من عدة اضلاع صغيرة جدا

مخروط قائم

هو ما كان العمود النازل من رأسه على سطح قاعدته يمر بمركزها على التدقيق

مخروط مائل

هو ما كان العمود النازل من رأسه على سطح قاعدته لا يمر بمركزها

مربع

هو متوازي الاضلاع الذي زواياه قائمة واضلاعه متساوية

مركز

هو نقطة الوسط في كل دائرة او كرة او شكل منتظم

مستطيل

هو ما كانت اضلاعه المتجاورة مختلفة وكانت جميع زواياه قائمة

مستو

راجع السطح المستوي

مضلع

راجع الشكل * واوجز المضلعات على الاطلاق هو المثلث

مضلع غير منتظم

هو الذي لم تتساو اضلاعه وزواياه

مضلع منتظم

راجع كثير الاضلاع المنتظم

معين

هو ما كانت اضلاعه متساوية ولم تكن احدى زواياه قائمة

منشور

هو ما احيط بسطوح متوازية الاضلاع وكان طرفاه محدودين بشكلين مستقيمي الاضلاع متساويين ومتوازيين * ويسمى منشورا مثلثيا اذا كانت قاعدتاه مثلثين ومتوازي السطوح اذا كانت قاعدتاه شكلين متوازيي الاضلاع ومتساويين ويقال لمتوازي السطوح الذي تكون اضلاعه اعمدة على سطحي القاعدتين متوازي المستطيلات وهو جسم محاط بستة اوجه اعني بست مستطيلات متساوية ومتوازية لبعضها اثنين اثنين

منشور قائم

هو ما كانت اضلاعه اعمدة على قاعدتيه

منشور مائل

هو ما كانت اضلاعه مائلة على قاعدتيه * وارتفاعه ايا كان هو البعد الذى بين قاعدتيه المعبر عنه بالعمود النازل من نقطة من احدى قاعدتيه على الاخرى * واشهر المناشير القائمة هو ما كانت جميع اضلاعه متساوية ومتوازية اثنين اثنين وكانت جميع زواياه ذات الوجهين قوائم وهذا المنشور يسمى مكعبا ويكون شكلا منتظما من حيث ان جميع اوجهه مربعات متساوية وجميع زواياه المجسمة قوائم متساوية

واذا اردت ان تاخذ مساحة حجم المكعب الذى طول احد اضلاعه معلوم فاضرب مربع الرقم الدال على هذا الطول فى نفسه او اضرب ارتفاع الجسم فى سطح قاعدته * ومساحة حجم المنشور المثلث هى الحاصل من ضرب ارتفاعه فى قاعدته * لان كل منشور مثلث نصف متوازى السطوح المجتمعه فى الارتفاع فيكون حجمه نصف حجم هذا الجسم

منطقة

هى جزء من سطح الكرة محصور بين دائرتين متوازيتين او بين دائرة الاستواء ودائرة موازية لها او القطب * وبعبارة اخرى هى جزء من سطح الكرة واقع بين مستويين متوازيين

حرف النون

نصف القطر

راجع الخط الشعاعى

نقطة

هى التى ليس لها شئ من الابعاد الثلاثة

نقطة التماس

هى ما اشترك فيه المحيط والخط المستقيم المماس له

نقطة الغرض

هى احدى النقط المرئية من جسم يتوجه اليه خط شعاعى بصرى

نقطة المرءى

راجع نقطة الغرض

حرف الهاء

هرم

هو جسم ذو قاعدة واحدة محاط بمثلثات رؤسها مجتمعة فى نقطة الرأس * ومساحة حجم الهرم المثلثى هى حاصل ضرب ارتفاعه فى ثلث قاعدته * وذلك لان الهرم المذكور يعتبر فى الهندسة ثلث متوازى سطوح متحد معه فى القاعدة والارتفاع لانه يمكن تحليل متوازى السطوح المذكور الى ثلاثة اهرام مثلثية متحدة فى القاعدة والارتفاع * وكيفية اخذ مساحة حجم اى هرم كان ان تحلل هذا الهرم الى عدة اهرام مثلثية بقدر ما يوجد فيه من الاوجه * وطريقة ذلك ان تفوت من رأسه مستويات تقسم قاعدته الى عدة مثلثات بقدر ما يوجد فيه من الاضلاع

هندسة

هى علم يبحث فيه عن مقدار الامتداد ومساحته

حرف الواو

وتر

هو الخط المستقيم الواصل بين طرفى القوس * وبعبارة اخرى هو خط مرسوم فى الدائرة ومنتهه الى المحيط من غير مرور بالمركز

(فهرست كتاب مبادى الهندسه)

صحيفه

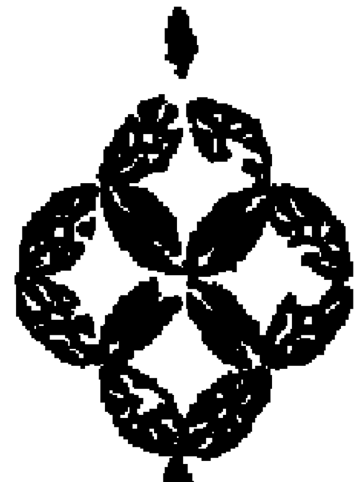
صحيفه

صحيفه

(تنبيــــــه)

اعلم ان حروف المقالة الثالثة من هذا الكتاب منها ما هو صغير ومنها ما هو كبير والفرق بينهما ان ما كان منها على نسق الحروف المصطلح عليها فى كتب الهندسة فهو الصغير وما كان منها على نسق الحروف الفارسية فهو الكبير فالدال الكبيرة مثلا صورتها هكذا د والصغيرة صورتها هكذا ء والسين الكبيرة صورتها هكذا س والصغيرة صورتها هكذا سـ والباء الكبيرة صورتها هكذا ب والصغيرة صورتها هكذا ـبـ والالف الكبيرة صورتها هكذا ا والصغيرة صورتها هكذا إ وهلم جرا

کتاب منہ



مبادی الهندسه

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله المحيط علمه بجميع الاشياء * المنزه عن اشكال الجسمية بلا امتراء المدبر ما كان وما يكون * تعالى عن ان تدركه العيون * فسبحانه لا اله سواه * ولا معبود الا اياه * استمد الكون الوجود من نقطة وجوده * فافتقر كل الى منشور كرمه وجوده * واستبد باستغنائه عن الكائنات * فعم كرمه جميع الموجودات * والصلاة والسلام على المنتخب من عدنان الناسخ دينه جميع الاديان * محمد المبعوث من خير اروومه * المنتخب من اكرم جرثومه * قطب مدار العالم ومركزه * من رسمت انواع الكمالات في حيزه * وعلى آله اعمدة الشريعة الغرا * واصحابه اساطين الناس طرا

وبعد فلما كان ولى النعم الشامله * والعواطف الغزيرة الكامله * صاحب العزمات الصديقية * والاراء العمرية * والمراحم العثمانية والفتكات العلوية * من هو الى سعة الرحمة يومى * افنديناعباس باشاحلمى * شديد الرغبة فى تمدين الايالة المصرية * حريصا على ان يكون فيها للمعارف اهلية * مولعا بما يعود نفعه على الاهالى * بصيرا بما ينفع فى الوقت الحالى لاسيما تعليم العساكر * العائدة منفعته فى الغابر * كان كثير الحث على نشر كتب العلوم * بطبع ما فرغ منها وترجمة ما هو بالعربية معدوم

وهذا مختصر كان قد عربه لمدرسة الطوبجية * وغيرها من المدارس العسكريه * من ترجى له شفاعة خير شافع * حضرة رفاعة بيك بدوى رافع * وصار عليه التعليم * وحصل به النفع العميم * ثم طرح فى زوايا الاهمال * وضرب عنه صفحا فى هذا المجال * لما ترجم كتاب لوجندر الشهير * والتفت اليه الصغير والكبير * ثم فى سنة ثمان وخمسين * بعد الالف والمائتين * اقتضى الحال الرغبة فيه * وكثرة راغبيه وطالبيه * على عادة تغير مزاج الزمان وطبعه * فصدر الامر بنشره وطبعه * ولما كان فيه من الاصطلاحات القديمة ما تمجه الاسماع * ولا يميل اليه سليم الطباع * ومن اللعثمات فى الترجمه * ما اوقع فى الحيرة من اراد تفهمه * اقتضى الحال فى سنة سبعين * بعد الالف والمائتين * ان يطبع بمطبعة مهندسخانه * بعد ان يقابله من خوجاتها اولوا الفطانه * وان يصلح ما وقع فيه من الغلطات * وان يغير منه ما لا يليق من الاصطلاحات * فاهتم بذلك ناظر هذه المدرسه * التى هى على المعارف موسسه * واحال مقابلته على المتوكل على ربه المعيد المبدى * احد خوجاتها برعى افندى * فشمر عن ساعد الجد فى مقابلته وتغيير الاصطلاحات * مع مشاركته فى بعض الاوقات لبعض الخوجات * وكان المباشر لتصحيح عباراته *

وتهذيب اشاراته * اسير الاوزار * ابراهيم عبد الغفار * اطال الله ايام
الخديوى صاحب الهمة العليه * ووسع به وبانجاله دائرة
المعارف فى مصر البهيه * بجاه من ركب
البراق * ورقى الى السبع
الطباق

(مبادى الهندسة)

(المقالة الاولى)

(وفيها عدة فصول)

(الفصل الاول)

(فى اصول علم الهندسة)

(مسائل اجمالية فى الامتداد)

(١) الفراغ الذى يشغله الجسم له بالضرورة ثلاثة ابعاد هى الطول والعرض والعمق او الارتفاع اى السمك

ونهايات الجسم سطوح فالسطح ماله طول وعرض فقط

ونهايات السطوح خطوط فالخط ماله بعد واحد وهو الطول

ونهايات الخطوط نقط هندسية فالنقطة ماليس له بعد

ومن المعلوم ان هذه النهايات الثلاث المختلفة لا وجود لكل منها على حدته فى الخارج وانما تعتبر فى الذهن والوهم فقط ولما كانت البسائط مقدمة على المركبات ذكرنا خواص الخطوط ثم السطوح ثم الاجسام وهذه النهايات الثلاث هى المقصودة من هذا العلم

(فى خواص الخطوط والسطوح)

(٢) الخط المستقيم هو اقصر بعد من نقطة الى اخرى

فحينئذ كل نقطتين مفروضتين لا يمكن ان يمد بينهما الا خط واحد مستقيم

(٣) كل خط ليس مستقيما ولا مركبا من الخطوط المستقيمة فهو خط منحن

والخط المستقيم منفرد فى نوعه بخلاف الخط المنحنى فانه لا نهاية لانواعه

(٤) السطح المستوى هو الذى يمكن ان ينطبق عليه خط مستقيم فى اى جهة من جهاته

فخطوط الاشكال المتعلقة بهذا الكتاب موضوعة على سطوح مستوية

(٥) كل سطح ليس مستويا ولا مركبا من سطوح مستوية فهو سطح منحن

والسطح

والسطح المستوى منفرد ايضا فى نوعه واما السطوح المنحنية فهى ذوات انواع لا نهاية لها

(٦) الخط المستدير المسمى ايضا محيط الدائرة كما فى (شكل ١) هو ما كانت نقطه الموضوعة فى سطح واحد على بعد واحد من نقطة الوسط المسماة مركزا وهذا الخط المستدير هو اسهل الخطوط المنحنية وهو المعتبر فى مبادى الهندسة دون غيره

(فى خواص الخطوط المستقيمة الصادرة عن وضع كل منها بالنسبة الى ما عداه)

(٧) من المعلوم ان الخط المستقيم لا يمكن ان يتلاقى مع مستقيم آخر الا فى نقطة واحدة

(٨) الزاوية هى الانفراج الواقع بين خطين مستقيمين متلاقيين يتوهم امتدادهما كما يراد فالخطان ب ا و ب ‍ـ المستقيمان كما فى (شكل ٢) هما ضلعا الزاوية ا ب ‍ـ ونقطة ب هى رأسها

(٩) الزاويتان المتساويتان هما اللتان اذا وضعت احداهما على الاخرى انطبقت عليها انطباقا كليا

(١٠) اذا تلاقى خطان مستقيمان كالخطين ا ‍ـ و ب د بحيث يحدث عنهما زاويتان متجاورتان متساويتان كالزاويتين ا ب د و د ب ‍ـ كما فى (شكل ٣) كان كل من هاتين الزاويتين زاوية قائمة وكان الخط ب د عمودا على ا ‍ـ و ا ‍ـ عمودا على ب د ومن ذلك يعلم ان سائر الزوايا القائمة متساوية لان المسافة الواحدة التى هى مثل ا د ‍ـ لا يمكن قسمتها الى قسمين متساويين بمستقيم مثل ب د الا بكونه عمودا على ا ‍ـ

(١١) كل زاوية اصغر من القائمة فهى حادة مثالها الزاوية ف ح ر وكل زاوية اكبر من القائمة فهى منفرجة مثالها الزاوية ‍ـ ح ر انظر (شكل ٤)

(١٢) كل مستقيم يلاقى مستقيما آخر فانه يحدث عنهما زاويتان متجاورتان مجموعهما يساوى زاويتين قائمتين

ومن المعلوم ان الزاويتين ‍ـ ح ش و ش ح ف المتجاورتين كما فى (شكل ٥)

مجموعهما مساو لزاويتين قائمتين فعلى ذلك اذا كانت احداهما قائمة كانت الاخرى بالضرورة كذلك اى قائمة وكان كل من الخطين اللذين حدث عنهما هاتان الزاويتان عمودا على الآخر

(١٣) سائر الزوايا ا ب د و د ب ﻫ و ﻫ ب ﺣ المتتالية الكائنة فى جهة واحدة من جهتى المستقيم ا ﺣ كما فى (شكل ٦) مجموعها يساوى زاويتين قائمتين

(١٤) اذا تقاطع خطان مستقيمان كما فى (شكل ٧) فالزاويتان المتقابلتان برأسيهما تكونان متساويتين

وذلك ان مجموع الزاويتين ا ب د و ا ب ﻫ المتجاورتين يساوى زاويتين قائمتين كما تقدم فى بند (١٢) وكذا مجموع الزاويتين ا ب د و د ب ﺣ يساوى زاويتين قائمتين فاذا طرح من كل من المجموعين الزاوية ا ب د المشتركة بقيت الزاوية ا ب ﻫ مساوية لمقابلتها د ب ﺣ وهو المطلوب وبمثل ذلك يبرهن على ان الزاوية ا ب د = ﻫ ب ﺣ

(١٥) فينتج من هذا ان جميع الزوايا التى يمكن رسمها حول نقطة تساوى اربع زوايا قائمة

(فى المثلثات وتساويها)

(١٦) اقل ما يلزم لتحديد مسافة ثلاثة مستقيمات وتسمى هذه المسافة مثلثا مثاله المثلث ا ب ﺣ كما فى (شكل ٨) وخطوط ا ب و ا ﺣ و ب ﺣ هى اضلاع ذلك المثلث

(١٧) يتساوى المثلثان اذا كان فى كل منهما زاوية مساوية لزاوية من الآخر ومنحصرة بين ضلعين مساو كل منهما لنظيره من الآخر فاذا فرض ا = اَ و ا ب = اَ بَ و ا ﺣ = اَ ﺣَ يقال كما فى (شكل ٨) ان المثلثين ا ب ﺣ و اَ بَ ﺣَ يمكن وضع احدهما على الآخر بحيث ينطبق عليه انطباقا كليا لاننا اذا وضعنا اَ بَ على مساويه الذى هو ا ب فان الضلع

اَ ﺣَ

أ سَ يقع على مساويه ا س بسبب المساواة التى بين الزاويتين أ و ا ومن حيث ان النقطة سَ تقع على النقطة س والنقطة بَ على ب ينطبق سَ بَ بالكلية على س ب فاذن تكون الاضلاع مساوية للاضلاع والزوايا للزوايا فالمثلثان يكونان متساويين

فينتج من ذلك بَ سَ = ب س و بَ = ب و سَ = س

(١٨) يتساوى المثلثان اذا كان فى احدهما ضلع مساو لنظيره من الآخر وكانت كلتا الزاويتين المجاورتين لكل من الضلعين مساوية لنظيرتها

فاذا كان أ = ا و بَ = ب و أ بَ = ا ب يكون المثلث أ بَ سَ = المثلث ا ب س كما فى (شكل ٨)

• برهان ذلك ان تضع أ بَ على الضلع المساوى له ا ب فبسبب تساوى الزاويتين أ و ا يقع الضلع أ سَ على استقامة ا س وتقع النقطة سَ فى محل يكون فى تلك الاستقامة وكذلك من حيث ان بَ = ب يقع الضلع بَ سَ على استقامة ب س فاذن تنطبق النقطة سَ على النقطة س فحينئذ يكون المثلثان متساويين

وينتج من هذا ان سَ = س و أ سَ = ا س و بَ سَ = ب س

(١٩) كل ضلع من اضلاع المثلث اصغر من مجموع الضلعين الآخرين وذلك ان الخط ا س المستقيم مثلا هو اقصر بعد من النقطة ا الى النقطة س فاذن يكون ا س اصغر من ا ب + ب س انظر (شكل ٩)

(٢٠) النقطة و المفروضة فى داخل المثلث ا ب س كما فى (شكل ٩) اذا اخرج منها الى طرفى الضلع ا ب مستقيمان وا و وب كان مجموع هذين المستقيمين اصغر من مجموع الضلعين الآخرين ا س و ب س

وذلك انك اذا مددت ا و الى ى وجدت فى المثلث وى ب ان وب < وى + ى ب فاذا اضفت الى كل من هذين المقدارين المستقيم ا و

يكون

او + وب < او + وى + ىب او او + وب < اى + ىب

ووجدت ايضا فى المثلث ابى ان اى < اب + بى فاذا اضفت الى كل من هذين المقدارين المستقيم ىب كان اى + ىب < اب + بب

لكن حيث ثبت فيما تقدم ان او + وب < اى + ىب يكون بالاولى

او + وب < اب + بب

(٢١) اذا ساوى ضلعان من احد مثلثين ضلعين من الآخر وكانت الزاوية التى بين الضلعين من احدهما اصغر من نظيرتها التى بين الضلعين من المثلث الآخر كان الضلع الثالث المقابل للزاوية الصغرى اصغر من الضلع الثالث المقابل للزاوية الكبرى

فاذا كان اب = اَبَ و اب = اَبَ و ا اصغر من اَ يكون بب اصغر من بَبَ كما فى (شكل ١٠)

وهذه الدعوى تكاد ان تكون واضحة بنفسها لانا اذا توهمنا ان الضلعين اب و اب باقيان على عظمهما الاصلى فى حالة كون الضلع الثالث بب يتزايد او يتناقص دائما وجب ان الزاوية ا المقابلة له تتزايد او تتناقص بحسبه ويمكن البرهنة على هذه الدعوى بوجه دقيق

وذلك ان تضع المثلث ابب على المثلث اَبَبَ بحيث ان اب ينطبق على اَبَ ويمكن ان يحدث من ذلك ثلاثة احوال وذلك لان نقطة ب اما ان تقع داخل المثلث اَبَبَ او على الضلع بَبَ او خارج المثلث اَبَبَ

ففى الحالة الاولى اى اذا وقعت النقطة ب داخل المثلث اَبَبَ كما فى (شكل ١٠) فى نقطة نفرضها بً يكون اَبً + بًبَ < اَبَ + بَبَ فاذا طرحنا من الطرف الاول اَبً او مساويه اب ومن

الطرف

الطرف الآخر مساويه آحَ بقى حَءَ أو حب < حَبَ

وفى الحالة الثانية اى اذا وقعت النقطة حـ على الضلع حَبَ فى نقطة نفرضها حَ كما فى (الشكل ١٠) يكون بَحَ او مساويه بح اصغر من بَحَ

وفى الحالة الثالثة اى اذا وقعت النقطة حَ خارجا فى نقطة نفرضها حَ يكون آحَ < حَءَ + آءَ و حَبَ < حَءَ + ءَبَ

فاذا جمعناها تين المتباينتين كل طرف الى نظيره وجدنا آحَ + حَبَ < حَبَ + آحَ

فاذا طرحنا آحَ من طرف ومساويه آحَ من الطرف الآخر يبقى حَبَ او مساويه حب < حَبَ وهو المطلوب

(٢٢) اذا ساوت اضلاع مثلث اضلاع مثلث آخر كل لنظيره كان المثلثان متساويين

وذلك ان ثلاثة اضلاع المثلث ا ح ب مساوية لثلاثة اضلاع المثلث آحَبَ كل لنظيره كما فى (شكل ٨) فيجب ان تكون الزاوية ا مساوية للزاوية آ لان الزاوية ا لو كانت اكبر من الزاوية آ او اصغر منها لكان حب اكبر من حَبَ او اصغر منه انظر بند (٢١) لكن هذان الضلعان متساويان فاذن تكون الزاوية ا مساوية للزاوية آ وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية ب مساوية بَ و ح = حَ

وينتج من هذا ان الزوايا المتساوية تكون مقابلة لاضلاع متساوية وبالعكس

(فى بيان الخطوط الاعمدة والمائلة)

(٢٣) من اليقينيات انه لا يمكن ان يقام من نقطة على مستقيم الا عمود واحد على ذلك المستقيم انظر (شكل ٣)

فاذا فرضنا ان حء يصنع مع اب زاويتين متجاورتين متساويتين

اب د و د ب ب كان المستقيم ب د عمودا على المستقيم اب كما في بند (١٠)

واما الخط ب د وما شبهه من الخطوط التي لم تكن اعمدة على المستقيم اب فانها تسمى خطوطا مائلة انظر (شكل ٧)

(٢٤) اذا فرضنا نقطة خارج مستقيم ورسمنا منها عمودا وعدة مستقيمات مائلة على هذا الخط نشا من ذلك ثلاث حالات كما في (شكل ١١)

الاولى ان العمود يكون اقصر من كل مستقيم مائل والثانية ان المستقيمات المائلة البعيدة عن موقع ذلك العمود ببعد واحد تكون متساوية والثالثة ان المستقيمين المائلين المتباينين في الطول يكون ابعدهما عن موقع ذلك العمود هو اطولهما

وذلك انك اذا مددت اب الذي هو عمود على د ب على استقامته واخذت مقدارا ب ف = اب ووصلت المستقيمين ب ف و د ف فان المثلث ب ب ف يساوي المثلث اب ب لان في احدهما ضلعين وزاوية بينهما يساوي كل منها نظيره من الآخر كما في بند (١٧) لكون ب ب مشتركا بين المثلثين و ب ف = اب بالعمل والزاويتين اللتين في نقطة ب قائمتين بالفرض فيكون ب ف = اب لكن من حيث ان الخط اب ف مستقيم يلزم ان يكون اف < اب + ب ف فيكون الخط اب الذي هو نصف الخط اف اقصر من اب الذي هو نصف الخط اب ف المنكسر فحينئذ يكون العمود اب اقصر من كل من الخطين اب و اد المائلين وهو المطلوب

ثم ليكن الآن ب ب = ب ب فيقال ان المثلث اب ب يساوي المثلث اب ب انظر بند (١٧) فحينئذ يكون اب = اب فاذن الخطان المائلان البعيدان بعدا واحدا عن النقطة ب التي هي موقع العمود اب يكونان متساويين .

والخط اد ف المنكسر في المثلث اب ف يكون اقصر من الخط اب ف

المنكسر

المنكسر انظر بند (٢٠) فحينئذ يكون اء الذى هو نصف الاول اقصر من اس الذى هو نصف الثانى فاذن الخطان المائلان المتباينان اطولهما هو ابعدهما عن موقع العمود

ولما كان العمود اقصر من كل خط مائل كان مقياسا للمسافة الحقيقية التى بين نقطة وخط مستقيم

(٢٥) ينتج مما سبق عدة نتائج

الاولى انه لا يمكن ان ينزل من نقطة مفروضة خارج مستقيم الا عمود واحد على ذلك المستقيم

الثانية انه لا يمكن ان يرسم من نقطة واحدة على مستقيم ثلاثة مستقيمات متساوية

الثالثة ان كل مثلثين قائمى الزاوية اذا كان فى كل منهما غير الزاوية القائمة ضلعان مساويان لنظيريهما من الآخر او كان فى كل منهما غير القائمة زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر وضلع مساو لنظيره منه فالمثلثان متساويان

الرابعة اذا كان المستقيم سء عمودا على منتصف مستقيم آخر مثل اب كما فى (شكل ١٢) فكل نقطة مثل و من سء تكون على بعد واحد من طرفى اب

الخامسة كل نقطة مثل ح موضوعة خارج عمود سء تكون متباينة البعدين عن طرفى الخط اب كما فى الشكل المذكور وذلك لان النقطة و على بعد واحد من طرفى الخط اب فيكون او = وب وحيث ان الضلع بح من المثلث حوب اصغر من حو + وب ينتج ان حب < وح + او فاذن يكون حب < اح

(٢٦) اذا كان فى المثلث ضلعان متساويان فالزاويتان المقابلتان لهذين الضلعين تكونان متساويتين•

مثال ذلك او = وب كما فى الشكل المذكور فاذا انزلنا من النقطة و عمودا وس على اب لزم ان يكون اس = سب فحينئذ يكون

المثلثان أ و حـ و ب و حـ متساويين لان اضلاعهما الثلاثة المتناظرة متساوية اولان في كل منهما ضلعين وزاوية بينهما يساوى كل منها نظيره من الآخر فاذن تكون الزاوية أ = الزاوية و ب ا
وكذلك اذا كانت الزاويتان ا و ب متساويتين فالضلعان و ب و ا و المقابلان لهاتين الزاويتين يكونان متساويين

(٢٧) اذا كان في المثلث ضلعان غير متساويين فالزاوية الكبرى هي التي تقابل الضلع الاكبر

مثال ذلك اء > ءب فاذا اقمنا حـ ء كما في (شكل ١٢) عمودا على منتصف اب ورسمنا و ب حدث زاويتان و ب ا و و ا ب متساويتان لكن الزاوية ء ب ا اكبر من الزاوية و ب ا فاذن الزاوية ء ب ا المقابلة للضلع اء الاكبر تكون اكبر من الزاوية ا المقابلة للضلع ء ب الاصغر وعكس هذه القضية النظرية ايضا صحيح وهو ان اصغر الاضلاع هو المقابل لاصغر الزوايا
وينتج من هذا انه متى كانت ثلاثة اضلاع المثلث متساوية فان زواياه الثلاثة تكون متساوية ايضا وبالعكس

(مبحث المتوازيات ونتائجها)

(٢٨) الخطان المتوازيان هما مستقيمان موضوعان في مستو واحد اذا مدا لا يتلاقيان ابدا فالخطان احـ و ب ء المستقيمان العمودان على الخط اب كما في (شكل ١٣) متوازيان بمقتضى التعريف
ومن الاصول المسلمة ان الخط المستقيم العمود على خط آخر يمكن ان يتلاقى مع كل خط مائل على ذلك الآخر فاذا امددنا مثلا الخط ب ء المائل مدا كافيا فانه يتلاقى ضرورة مع الخط احـ الذى هو عمود على الخط اب ومن حيث ان هذه القضية تكاد ان تكون واضحة بنفسها تعسرت البرهنة عليها بدليل هندسي فلهذا صار مبحث المتوازيات ناقصا غير شاف

(٢٩) اذا قطع خطان متوازيان بخط ثالث مستقيم فمجموع الزاويتين

الداخلتين

الداخلتين فى جهة واحدة يساوى زاويتين قائمتين

وذلك انا اذا انزلنا من النقطة م التى هى منتصف المستقيم وش عمودا مك على الخط اب كما فى (شكل ١٤) كان هذا العمود عمودا ايضا على سد انظر بند (٢٨) وكان المثلثان مكو و مل‌ش القائما الزاوية فى ك و ل متساويين لان الضلعين وم و مش متساويان بالعمل وكذلك الزاويتان كمو و شمل متساويتان لانهما متقابلتان برأسيهما انظر بند (١٤) فاذن تكون الزاوية كوم = مشل وحيث ان مجموع الزاويتين مشل و مشد يساوى قائمتين وان مشل يساوى مولك يكون مجموع الزاويتين بوب و مشد الداخلتين فى جهة واحدة مساويان زاويتين قائمتين

ولاجل الاختصار تسمى الزاويتان اوب و سشب المتساويتان الكائنتان فى جهة واحدة من القاطع بف بالداخلة والخارجة على التقابل او بالمتقابلتين بالدخول والخروج

وتسمى كوم و مشل المتساويتان الكائنتان فى كل من جهتى القاطع بف وبين المتوازيين اب و سد بالمتبادلتين بالدخول وتسمى فوك و بشل المتساويتان الكائنتان فى جهتى الخط القاطع وخارج المتوازيين بالمتبادلتين بالخروج

ويظهر من هذا الشكل ان جميع زواياه الحادة متساوية وكذلك المنفرجة

(٣٠) الخطان المستقيمان الموازيان لثالث يكونان متوازيين

مثال ذلك الخطان اب و وش الموازيان للخط سد كما فى (شكل ١٣) فاذا فرضنا نقطة مثل و واقمنا منها على مستقيم سد عمودا وب كان هذا العمود عمودا ايضا على اب و وش فحينئذ هذان المستقيمان يكونان عمودين على خط واحد فاذن هما متوازيان انظر بند (٢٨)

(٣١) الخطان المتوازيان يكون بعد احدهما عن الآخر واحدا من كل محل فاذا رسمنا بين المتوازيين اب و سد من اى محل عمودين اس

و ب د على المستقيم ا ب كما فى (شكل ١٥) كان هذان العمودان متساويين وذلك لان المثلثين ا ب ح و ح ب د متساويان لان فى كل منهما زاويتين وضلعا بينهما مساويا كل منها النظيره من الآخر فان ب ح مشترك بين المثلثين والزاويتين ح ب ا و ب ح د المتبادلتين بالدخول متساويتان وبمثل ذلك يبرهن على التساوى بين الزاويتين ا ح ب و ح ب د فاذن يكون ا ح = ب د

ويؤخذ من هذا ان اجزاء المتوازيات المحصورة بين متوازيات اخرى تكون متساوية وبالعكس •

(٣٢) كل زاويتين اتجهتا الى جهة واحدة وكانت اضلاعهما المتناظرة متوازية وموضوعة على جهة واحدة فانهما يكونان متساويتين

مثال ذلك دف الموازى ا ب و د ے الموازى ا ح كما فى (شكل ١٦) فاذا امددنا د ے الى نقطة مثل ح يقال من حيث ان المستقيم ےح قاطع للمتوازيين ا ب و د ف فالزاويتان ے د ف و ے ح ب المتقابلتان بالدخول والخروج تكونان متساويتين وكذا يقال من حيث ان المستقيم ا ب قاطع للمتوازيين ا ح و ح ے فالزاويتان ا و ح تكونان متساويتين فاذن تكون الزاوية ا = د

(فى الكلام على الخطوط المستقيمة المتعلقة بالدائرة وعلى قياس الزوايا)

(٣٣) نصف قطر الدائرة كل خط مستقيم خرج من مركز الدائرة الى محيطها مثاله الخط م ا كما فى (شكل ١٧)

ومن المعلوم ان الخط المستقيم لا يمكن ان يتلاقى مع محيط الدائرة فى اكثر من نقطتين

والقوس جزء من المحيط مثاله ا د ب والوتر هو المستقيم الواصل من احدى نهايتى القوس الى الاخرى مثاله ا ب •

والقطر هو الوتر الذى يمر بالمركز وينتهى من طرفيه بالمحيط مثاله ا ے

والقاطع كل خط قطع محيط الدائرة فى نقطتين مثاله م ن

وقطعة

وقطعة الدائرة هى السطح الواقع بين القوس ووتره مثالها اىـا
والقطع جزء من سطح الدائرة محصور بين القوس ونصفى القطر المنتهيين بطرفى هذا القوس مثاله اــــا
والمماس هو المستقيم المشارك للمحيط فى نقطة واحدة مثاله المستقيم ط ن وهذه النقطة تسمى نقطة التماس
والزاوية المحيطية زاوية حادثة من وترين ورأسها فى المحيط مثالها الزاوية اــــ من (الشكل ٢٤)
(٣٤) متى تساوت الاقواس فى دائرة واحدة او فى دوائر متساوية تساوت اوتارها وبالعكس.
فاذا كان القوس امـ مساويا للقوس ىهـ فان الوتر اــ = الوتر ىـ كما فى (شكل ١٨) وذلك لان القوس امـ يمكن ان ينطبق بالكلية على القوس ىهـ بسبب تساويهما واتحاد انحنائهما فاذن النقطتان ا و ــ تقعان على نظيرتيهما ـ و ى فيكون بالضرورة اــ = ىـ
وكذلك اذا كان الوتران اــ و ىـ متساويين فالقوسان امـ و ىهـ الموتران بهما يكونان متساويين لان من المعلوم ان المثلثين اــ و ىـ اضلاعهما متساوية كل لنظيره فتكون الزاويتان اــ و ىـ متساويتين فاذن القوسان امـ و ىهـ يكونان ايضا متساويين
(٣٥) اعظم الاقواس الاقل من نصف المحيط ما كان موترا باعظم الاوتار وبالعكس فاذا فرض ان القوس اــى > من القوس امـ كما فى (الشكل ١٨). يقال ان فى كل من المثلثين اــ و اــى ضلعين مساويين لنظيريهما من الآخر لكون الخطوط اــ و ــ و ــى المستقيمة انصاف اقطار لدائرة واحدة لكن الزاوية اــ اصغر من الزاوية اــى فاذن يكون اــ < من اى كما فى بند (٢١)
وكذا اذا فرض ان الوتر اى > من الوتر اــ فانه ينتج من نفس هذين

المثلثين ان الزاوية اسد > من الزاوية اسب

(٣٦) العمود المقام على طرف نصف قطر دائرة يكون خطا مماسا لمحيط هذه الدائرة

فاذا فرض ان اب هو العمود على نصف القطر اس كما فى (شكل ١٩) يقال ان كل خط مائل مثل سب اطول من نصف القطر المذكور كما فى بند (٢٤) فيقتضى ذلك تكون النقطة ب خارج الدائرة فاذن الخط اب لا يجتمع مع المحيط الا فى النقطة ا فحينئذ يكون اب خطا مماسا كما فى بند (٣٣)

ومن هنا ينتج ان كل دائرتين متماستين من داخل او من خارج تكون نقطة تماسهما ونقطتا مركزيهما على خط مستقيم واحد كما فى (شكل ٢٠)

(٣٧) اذا كان نصف القطر عمودا على وتر فانه يمر بمنتصف ذلك الوتر وبمنتصف قوسه وبيان ذلك ان يقال

اولا من حيث ان نصف القطر اس و سب خطان مائلان متساويان يلزم ان يكونا على بعد واحد من العمود سد كما فى (شكل ٢١) فاذن اج = جب

وثانيا من حيث ان العمود سد مار بمنتصف اب فالنقطة د التى على هذا العمود تكون على بعد واحد من ا و ب فاذن الوتر اد = الوتر دب فحيث ان هذين الوترين متساويان يكون القوسان اد و دب ايضا متساويين كما فى بند (٣٤)

ومن هنا ينتج ان النقطة س التى هى المركز والنقطة ج التى هى منتصف الوتر اب والنقطة د التى هى منتصف القوس ادب تكون ثلاثتها واقعة على الخط المستقيم

ومنه ينتج ايضا ان القوسين جم و اد الواقعين بين الخطين المتوازيين يكونان متساويين انظر (شكل ١٧)

وذلك لان جر = را و مر = رد فينتج من ذلك ان

ـب ر ـ م ر = ر ا ـ رَ دَ او ـب م = ا دَ

(٣٨) اذا كانت النسبة الكائنة بين زاويتين مركزيتين فى دائرة واحدة او فى دائرتين متساويتين عددا صحيحا تكون النسبة بين قوسيهما كالنسبة بين هذين العددين

فاذا فرض ان النسبة بين الزاويتين اسـب و آسَـبَ على نسبة صحيحة كنسبة ٣ : ٥ مثلا اى فرض ان الزاوية م المفروضة مقياسا مشتركا داخلة ثلاث مرات فى الزاوية اسـب وخمس مرات فى الزاوية آسَـبَ يقال حيث ان الزوايا الجزئية متساوية تكون اقواسها المتناظرة اغ و ضـغ ... الخ و آغَ و ضَـغَ ... الخ متساوية ايضا فاذن يثبت ان نسبة القوس اـب بتمامه الى القوس آبَ بتمامه كنسبة ٣ : ٥

وعكس هذه القضية ايضا صحيح اى اذا كانت النسبة بين القوسين اـب و آبَ عددا صحيحا تكون النسبة بين الزاويتين المركزيتين سـ و سَـ كذلك

واذا فرض ان الزاويتين اسـب و آسَـبَ على غير نسبة صحيحة فالنسبة بينهما كالنسبة بين قوسيهما اـب و آبَ كما فى (شكل ٢٣)

فلنضع الزاوية آسَـبَ الصغرى على الزاوية اسـب الكبرى بحيث تكون الزاوية اسـبً = آسَـبَ فبمقتضى منطوق الدعوى تتركب متناسبة هكذا الزاوية اسـب : الزاوية اسـبً :: القوس اـب : القوس ابً فلو فرضنا ان هذه المتناسبة غير صحيحة وان حقها ان تكون هكذا

الزاوية اسـب : الزاوية اسـبً :: القوس اـب : القوس او

ثم فرضنا تقسيم اـب الى اقسام متساوية كل واحد منها اصغر من بً و بحيث يوجد ضرورة بين بً و و نقطة احد التقاسيم ولتكن ع ثم وصلنا

بين ع و ص حدثت متناسبة تقريرها

الزاوية اصب : الزاوية اصع :: القوس اب : القوس اع

فبسبب تساوى هذه المقدمات فى هذه المتناسبة وفى التى قبلها ينتج ان

نسبة الزاوية اصث : الزاوية اصع :: القوس او : القوس اع

لكن القوس او اكبر من اع فيلزم لصحة هذه المتناسبة الاخيرة ان تكون

الزاوية اصث اكبر من الزاوية اصع والحال انها اصغر منها فاذن

لا يمكن ان تكون نسبة الزاوية اصب للزاوية آصَتَ كنسبة القوس

اب لقوس اكبر من القوس آتَ او اث

وبمثل هذا الوجه يبرهن ايضا على ان الطرف الرابع من المتناسبة لا يمكن

ان يكون اصغر من آتَ فاذن هو مساوله فاذن تكون المتناسبة دائما هكذا

الزاوية اصب : الزاوية آصَتَ :: القوس اب : القوس آتَ

وحيث ان الزاوية التى فى مركز الدائرة وقوسها الذى بين ضلعيها يزيدان

وينقصان على نسبة واحدة فلنا ان ناخذ كلا من هذين المقدارين مقياسا

للآخر وهذا احد الاسباب التى حملت المهندسين على اخذ القوس اب

مثلا مقياسا للزاوية اصب مع ان الاوفق طبعا قياس مقدار بمقدار آخر

من نوعه ثم من المعلوم انه اذا كان القوس اب ربع محيط دائرة تكون

الزاوية قائمة

(٣٩) ينتج مما سبق ان القطعين الكائنين فى دائرة واحدة او فى الدوائر المتساوية تكون نسبتهما كنسبة قوسيهما

فحينئذ الاقواس المستعملة لقياس الزوايا يمكن ان تستعمل ايضا لقياس قطوع الدائرة الواحدة

(٤٠) كل زاوية مرسومة فى المحيط اى حادثة من وترين فان مقياسها هو نصف القوس الواقع بين ضلعيها فلنفرض ان احد ضلعى

الزاوية

الزاوية اسـب هو قطر الدائرة الذی هو سـب ثم نرسم من المركز و مستقيما ءف موازيا للخط اسـ

فالزاوية فوب التی رأسها فی المركز مساوية للزاوية سـ لانهما متقابلتان بالدخول لكن الزاوية المركزية ف و ب مقياسها القوس ف ب ومن حيث ان هذا القوس ف ب = سـء وهذا القوس سـء = اف لدخولهما بين الخطين المتوازيين كما فی (بند ٣٧) تكون الزاوية سـ مقياسها ب ف = $\frac{اب}{٢}$

واذا كان المركز و فی داخل الزاوية سـ كما فی (شكل ٢٥) يرسم قطر للدائرة ولنفرضه سـ و ء فمقياسا الزاويتين اسـء و بسـء يكونان $\frac{اء}{٢}$ و $\frac{ءب}{٢}$ ومن حيث ان الزاوية المطلوبة التی هی اسـب = اسـء + ءسـب يكون مقياسها $\frac{اء}{٢}$ + $\frac{بء}{٢}$ يعنی $\frac{اب}{٢}$

واذا كان المركز و خارج الزاوية اسـب كما فی (شكل ٢٦) يرسم قطر سـ و ء ومن المعلوم ان هذه الزاوية تساوی اسـء ــ بسـء فيجب ان يكون مقياسها $\frac{اء}{٢}$ ــ $\frac{بء}{٢}$ يعنی $\frac{اب}{٢}$

(٤١) كل زاوية حادثة من وتر وخط مماس فان مقياسها يكون نصف القوس الواقع بين ضلعيها

فليرسم قطر سـء ثم يقال اذا كانت الزاوية اسـب الحادثة من الوتر سـب ومن المماس اسـ اصغر من قائمة فان القطر سـء يكون خارج هذه الزاوية وفی عكس ذلك يكون فی الزاوية اسـف انظر (شكل ٢٧)

ففی الصورة الاولی اسـب = اسـء ــ بسـء ومن حيث ان الزاوية اسـء قائمة فربع المحيط المساوی $\frac{سـبء}{٢}$ هو مقياسها انظر (بند ٣٨) وحيث ان الزاوية بسـء مقياسها $\frac{بء}{٢}$ يكون مقياس الزاوية اسـب = $\frac{سـبء}{٢}$ ــ $\frac{بء}{٢}$ = $\frac{سـب}{٢}$

وفی الصورة الثانية الزاوية اسـفَ = اسـء + ءسـفَ فاذن

الزاوية اسف يكون مقياسها $\frac{\text{مسد}}{٢} + \frac{\text{دف}}{٢} = \frac{\text{مسدف}}{٢}$ يعنى نصف القوس الواقع بين ضلعيها

(فى الاشكال الكثيرة الاضلاع وخواصها الاصلية)

(٤٢) السطوح المستوية المحاط كل منها بعدة خطوط مستقيمة تسمى بذوات الاضلاع ولنبين كلا منها على حدته فنقول

اولا المسافة التى تحاط بثلاثة خطوط مستقيمة تسمى مثلثا وقد سبق الكلام على بعض خواصه فالمثلث بالنظر لاضلاعه يسمى

متساوى الاضلاع اذا كانت اضلاعه الثلاثة متساوية

ومتساوى الساقين اذا كان فيه ضلعان متساويان فقط

ومختلف الاضلاع اذا كانت اضلاعه الثلاثة غير متساوية

وبالنظر الى زواياه يسمى منفرج الزاوية اذا كان فيه زاوية منفرجة

وحاد الزوايا اذا كانت زواياه الثلاثة حادة

وقائم الزاوية اذا كان فيه زاوية قائمة والضلع المقابل لها يسمى وتر القائمة

ومتساوى الزوايا اذا كانت زواياه الثلاثة متساوية

وثانيا المسافة المحدودة باربعة خطوط مستقيمة تسمى بذى الاربعة اضلاع ولنذكر انواعه فنقول

المستطيل هو ما كانت اضلاعه المتجاورة مختلفة وزواياه قائمة كما فى (شكل ٣٠)

والمربع هو ما كانت اضلاعه متساوية وزواياه قائمة كما فى الشكل المذكور

والمتوازى الاضلاع هو ما كانت اضلاعه المتقابلة متوازية ولم تكن احدى زواياه قائمة كما فى (شكل ٢٨)

والمعين هو ما كانت اضلاعه الاربعة متساوية ومتوازية كما فى (شكل ٢٩)

وشبه المنحرف هو ما كان فيه ضلعان متوازيان فقط

والمسافة التى تحاط باكثر من اربعة اضلاع تسمى كثير الاضلاع فان كان كثير الاضلاع ذا خمسة اضلاع يسمى مخمسا وان كان ذا ستة يسمى مسدسا وان كان ذا سبعة يسمى مسبعا وهكذا الى المعشر

وذو

وذو الاثني عشر ما كانت اضلاعه اثني عشر

وذو الخمسة عشر هو ما كانت اضلاعه خمسة عشر وهكذا

والمستقيم الواصل بين رأسي الزاويتين غير المتجاورتين في ذي الاربعة اضلاع اوفي كثير الاضلاع يسمى قطر الشكل

(٤٣) كل مثلث مستقيم الاضلاع مجموع زواياه الثلاثة يساوي زاويتين قائمتين فاذا مد كما في (الشكل ٣١) اب ورسم ب ح موازيا للخط اب كانت الزاويتان ا و ء ب ح متساويتين لكونهما متقابلتين بالدخول والخروج وكذلك الزاويتان ب و ب ح ء فتكونان متساويتين لكونهما متبادلتين بالدخول لكن مجموع الزوايا ح ب ء و ب ح ء و اب ح الثلاث يساوي قائمتين فاذن مجموع زوايا المثلث المستقيم الاضلاع يساوي قائمتين

فينتج اولا من ذلك بالبداهة ان الزاوية ب ح ء الخارجة تساوي مجموع الزاويتين ا و ب الداخلتين

وثانيا انه اذا كانت احدى زوايا المثلث قائمة فكل واحدة من الباقيتين تكون حادة ومجموعهما يساوي قائمة

(٤٤) مجموع الزوايا الداخلة في كل شكل كثير الاضلاع يساوي قوائم بعدة اضلاعه الا اثنين مضروبا باقيه في قائمتين

فاذا وصلنا من النقطة ا الى جميع رؤس الزوايا المتقابلة اقطارا اب و اء الخ فاننا نجد بالبداهة ان كثير الاضلاع يصير منقسما الى مثلثات عدتها كعدة اضلاع هذا الشكل الا اثنين كما في (شكل ٣٢ او ٣٣) وحيث ان مجموع سائر زوايا هذه المثلثات عبارة عن مجموع زوايا كثير الاضلاع المذكور يكون هذا المجموع مساويا قوائم بعدة اضلاعه الا اثنين مضروبا باقيه في قائمتين فالمخمس الذي في (شكل ٣٢) مجموع زواياه الداخلة يساوي زاويتين قائمتين ثلاث مرات او ست زوايا قائمة فاذا اشرنا لعدد اضلاع الشكل المطلوب بالحرف ع ولمجموع زواياه بالحرف م وللقائمة بالحرف ق تتركب معادلة

هكذا م = (ع ـ ٢) ٢ ق يعنى ان مجموع زوايا كثير الاضلاع الداخلة يساوى قوائم بعدد اضلاعه ناقصا اثنين مضروبا باقيه فى قائمتين

(٤٥) فحينئذ تسهل البرهنة على انا اذا مددنا من جهة واحدة اضلاع كثير الاضلاع المحدب يعنى الذى ليس له الا زوايا محدبة كان مجموع زواياه الخارجة يساوى دائما اربع زوايا قائمة

وذلك ان مجموع زواياه الداخلة والخارجة يساوى قوائم بعدد اضلاعه مضروبا فى قائمتين ومجموع زواياه الداخلة يساوى قوائم بعدد اضلاعه الا اثنين مضروبا باقيه فى قائمتين فيعلم من ذلك ان فاضل هذين المجموعين وهو مجموع الزوايا الخارجة يساوى اربع زوايا قائمة

وهذه الدعوى هى والسابقة نافعتان خصوصا فى تحقيق عدم الخطا فى مساحة زوايا كثير الاضلاع المرسوم على الارض كما تراه فيما سيأتى

(الفصل الثانى)

(فى مبحث الخطوط المتناسبة وتشابه المثلثات والكثيرة الاضلاع)

(٤٦) الخطوط ــ ـ و ســ ف و د ح المستقيمة المتوازية القاسمة لاحد اضلاع المثلث وهو م ا من (شكل ٤٣) الى اقسام متساوية مثل ا ــ و ــ ســ و ســ د تقسم ايضا الضلع الآخر وهو اشـ من هذا المثلث الى اقسام متساوية مثل ا ـ و ـ ف و ف ح بشرط ان تكون هذه الخطوط المتوازية موازية ايضا للضلع الثالث وهو م شـ

واذا كانت الابعاد اــ و ــ ســ و ســ د الخ متساوية وكانت المستقيمات ــ ـ و ســ ف و ح د متوازية كانت الابعاد ا ـ و ـ ف و ف ح ايضا متساوية ولاجل بيان ذلك ترسم خطوط ـ غ و ف ضـ و ح ظ الخ موازية للمستقيم ام فتحدث مثلثات اــ ـ و ـ غ ف و ف ضـ ح الخ متساوية لان الخطوط ـ غ و ف ضـ الخ تكون ايضا متساوية لكونها مساوية لنظائرها من الخطوط ــ ســ و ســ د الخ بسبب انها خطوط متوازية واقعة بين خطوط متوازية انظر نمرة (٣١) وايضا الزوايا ــ ا ـ و غ ـ ف

الخ متساوية لانها متقابلة بالدخول والخروج والزوايا اب و بف
الخ هي ايضا متساوية لان انفراجها متوجه الى جهة واحدة واضلاعها
متوازية كما في بند (۳۲) فحيث ان في كل من هذه المثلثات زاويتين بينهما
ضلع مساو لنظيره من الآخر تكون متساوية فاذن يكون اب = بف
= فح = الخ

فينتج من هذا انه متى كان بين خطين مثل اـ و اب نسبة ما تكون تلك
النسبة بعينها بين ضعفيهما المتناظرين المتساويين وهما اد و اح اي
انه يحدث

اـ : اب :: اد : اح :: ع × اـ : ع × اب

وحرف عين يدل على عدد صحيح

ثم اذا كان المستقيم دب الموازي للخط اس للمستقيم من المثلث
اس كما في (شكل ۳٥) يقسم الضلع اـ الى قسمين متناسبين
مثل ـد و اد فانه يقسم ايضا س على هذه النسبة بعينها يعني
ان نسبة

ـد : اد :: ـب : بس او اـ : ـد :: س : ـب

لكن لو فرضنا ان الامر بخلاف ذلك بان فرضنا ان اـ : ـد :: س
: ـف ثم قسمنا س الى اجزاء متساوية بحيث يقع بين ب و ف
نقطة احد الاقسام ولتكن ع ورسمنا من النقطة ع مستقيما عك
موازيا اس لحدث

اـ : ـك :: س : ـع

فينتج بالضرورة من هذه المتناسبة ومن السابقة متناسبة هي

ـد : ـك :: ـف : ـع وهي غير صحيحة لان ـد اصغر من
ـك فيلزم ان يكون ـف اصغر من ـع مع انه اكبر منه
فاذن لا يكون الحد الرابع من المتناسبة المفروضة اكبر من ـب وبمثل
هذا يبرهن ايضا على انه لا يمكن ان يكون اصغر منه فيكون ـف = ـب

وبهذا يثبت المطلوب
وعكس الدعوى المذكورة ايضا صحيح اى اذا كان ضلعان من مثلث مقسومين بخط مستقيم الى اقسام متناسبة كان هذا الخط المستقيم موازيا للضلع الثالث

(٤٧) المثلثات التى زواياها المتناظرة متساوية واضلاعها المتناظرة متناسبة تسمى مثلثات متشابهة والمراد بالاضلاع المتناظرة هى التى تكون على وضع واحد فى هذه الاشكال او التى تكون مجاورة لزوايا متساوية وهذه الزوايا تسمى زوايا متناظرة

(٤٨) كل مثلثين متساويى الزوايا تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة فيلزم ان يكونا متشابهين

فلنأخذ على الضلعين اح و سـ من المثلث الاكبر جزءين سـ ح و سـ ى مساويين للضلعين سَـ اَ و سَـ حَ من المثلث الاصغر كما فى (شكل ٣٦) ونصل بين النقطتين ح و ى بخط مستقيم فيصير المثلث ح سـ ى مساويا للمثلث اَ سَـ حَ لان فى كل منهما ضلعين وزاوية بينهما مساوية لنظائرها من الآخر لان المثلثين ا سـ و اَ سَـ حَ متساويا الزوايا بالفرض فحينئذ المستقيم ح ى يكون مساويا اَ حَ وموازيا ا سـ فيكون بمقتضى القضية السابقة اسـ : سـ :: اَ سَـ : سَـ حَ فاذن كل مثلثين متساويى الزوايا تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة

(٤٩) كل مثلثين اضلاعهما المتناظرة متوازية فهما متشابهان لانهما متساويا الزوايا بموجب (٣٢)

وبمثل ما تقدم يبرهن على ان المثلثين اللذين فى كل منهما زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر وكائنة بين ضلعين متناسبين لنظيريهما منه يكونان متشابهين

(٥٠) كل مثلثين اضلاعهما المتناظرة متناسبة فهما متشابهان

ولنفرض

ولنفرض فى المثلثين ا ب ح و اَ بَ حَ كما فى (شكل ٣٧) ان

ا ب : اَ بَ :: ا ح : اَ حَ :: ب ح : بَ حَ

فالمطلوب حينئذ اثبات ان ا = اَ و ب = بَ و ح = حَ

ولاجل ذلك يرسم مثلث اَ بَ ء متساوى الزوايا مع المثلث ا ب ح

بحيث تكون الزاوية اَ بَ ء = للزاوية ب والزاوية بَ اَ ء = ا

فبمقتضى القضية السابقة يكون ا ب : اَ بَ :: ا ح : اَ ء :: ب ح

: بَ ء لكن قد فرض ان ا ب : اَ بَ :: ا ح : اَ حَ :: ب ح

: بَ حَ

فيكون اَ ء = اَ حَ و بَ ء = بَ حَ

فحينئذ يكون المثلثان اَ بَ ء و اَ حَ بَ متساويين لكن المثلث اَ بَ ء

متساوى الزوايا مع المثلث ا ب ح فاذن يكون المثلثان ا ح ب و اَ حَ بَ

متساويى الزوايا ومتشابهين

وينتج مما تقدم انه لاجل معرفة ان المثلثين متشابهان يشترط ان يكون فى كل منهما زاويتان مساويتان لنظيرتيهما من الآخر وتكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة

(٥١) كل مثلثين اضلاع احدهما اعمدة على اضلاع الآخر كل على نظيره فهما متشابهان

فلتكن الاضلاع ء ب و ء ق و ب ق كما فى (شكل ٣٨) اعمدة على الاضلاع ا ح و ا ب و ح ب كل على نظيره ففى ذى الاربعة الاضلاع الذى هو ح خ ب ض مجموع زواياه الاربع يساوى اربع زوايا

قائمة لكن الزاويتان غ و ضـ قائمتان بالفرض فاذن يكون مجموع الزاويتين سـ و د ب ضـ الباقيتين مساويا قائمتين لكن الزاويتان د ب ضـ و د ب ف تساويان ايضا قائمتين فاذن الزاوية د ب ف = سـ وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية ف د ب = ا وان الزاوية د ف ب = ب فاذن المثلثان ا ب سـ و د ب ف اللذان اضلاعهما المتناظرة اعمدة على بعضها يكونان متساويي الزوايا فاذن هما متشابهان

ومن المعلوم ان الاضلاع المتناظرة هي التي تكون بعضها اعمدة على بعض فينتج من ذلك بالبداهة ان ا ب : د ف :: ا سـ : د ب :: ب سـ : ب ف

وهذا على فرض ان احد المثلثين داخل في الآخر فاذا لم يكن كذلك فانه يمكن توهم مثلث ثالث مثل المثلث د ب ف الداخل تكون اضلاعه موازية لاضلاع المثلث ا ب سـ فحينئذ البرهان السابق ينطبق ايضا على هذا الشكل

(٥٢) كل خطين متوازيين قاطعين لخطوط مستقيمة خارجة من نقطة واحدة فانهما ينقسمان بتلك الخطوط المستقيمة الى اجزاء متناسبة

بحيث ان المستقيمين ب سـ و د ح متوازيين كما في (شكل ٣٩) يكون ب و : ح ط :: و ب : ط هـ :: ب سـ : هـ د لان ح ط حيث انه مواز ب و يكون المثلثان ا ط ح و ا ب و متساويي الزوايا فتكون المتناسبة هكذا ح ط : ب و :: ا ط : ا و

وكذا يقال في المثلثين ا و ب و ا ط هـ اى حيث انهما متساويا الزوايا تكون المتناسبة هكذا هـ ط : و ب :: ا ط : ا و

فبسبب النسبة المشتركة التي هي ا ط و ا و يكون ب و : ح ط :: و ب : ط هـ

وبمثل ذلك تحصل متناسبة و ب : ط هـ :: ب سـ : هـ د فاذن الخط ح د ينقسم في النقطتين ط و هـ بقدر ما انقسم

الخط

الخط سـ سـ في النقطتين و , ى

فينتج من هذا انه اذا كان ـ سـ منقسما الى اجزاء متساوية يكون موازيه وهو ~ى منقسما ايضا الى اجزاء متساوية

(٥٣) كل مثلث قائم الزاوية اذا انزلنا من قائمته على وترها عمودا فانه يحدث من ذلك ثلاث حالات كما في (الشكل ٤٠)

الاولى ان العمود يقسم المثلث الى مثلثين متشابهين ومشابهين له

الثانية ان العمود يكون وسطا متناسبا بين قسمي وتر القائمة

الثالثة ان كل ضلع من ضلعي قائمة المثلث المذكور يكون وسطا متناسبا بين وتر القائمة بتمامه والقسم المجاور له

مثال ذلك المثلث اسـ ـ القائم الزاوية في ا فالعمود اى النازل من النقطة ا على الوتر سـ ـ يقسم هذا المثلث الى مثلثين آخرين متشابهين ومشابهين له لان مجموع الزاويتين ~ و سـ = قائمة وكذلك الزاويتان ~ و و فيلزم ان سـ = و وبمثل ذلك يبرهن على ان ~ = ـ فاذن المثلثان اسـى و اى ـ يكونان متساويى الزوايا معا ومع المثلث اسـ ـ فهما متشابهان فمن تشابه المثلثين الاولين وهما اسـى و اى ـ تتركب متناسبة سـى : اى :: اى : ى ـ يعنى ان العمود اى هو وسط متناسب بين قسمي وتر القائمة وهما سـى و ـى

ومن تشابه المثلثين اسـ ـ و اسـى تتركب متناسبة

سـى : اسـ :: اسـ : سـ ـ (١)

ومن تشابه المثلثين اسـ ـ و اى ـ تتركب متناسبة

ـى : اـ :: اـ : ـ سـ (٢)

فاذن كل من ضلعي الزاوية القائمة من المثلث القائم الزاوية وسط متناسب بين الوتر بتمامه والقسم المجاور له

فينتج من المتناسبتين (١) و (٢) ان $\overline{\text{اـ}}^{2}$ = ـ سـ × ـى

و $\overline{\text{اسـ}}^{2}$ = ـ سـ × سـى

فاذا جمعنا هاتين المعادلتين كل طرف لنظيره تحصل

$$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اج}}^{2} = \text{بج} \, (\text{بد} + \text{جد})$$

لكن $\text{بد} + \text{جد} = \text{بج}$ فاذن $\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اج}}^{2} = \overline{\text{بج}}^{2}$

يعنى ان مجموع مربعى ضلعى الزاوية القائمة مساو لمربع وتر القائمة

وسيأتى قريبا ذكر هذه القضية المهمة بطريقة اخرى غير متعلقة بتشابه المثلثات

(خواص الدائرة)

(٥٤) اجزاء الوترين المتقاطعين فى دائرة تكون متناسبة على التعاكس

وبيانه ان المثلثين اهد و جهب من (شكل ٤١) متشابهان لكونهما متساويى الزوايا وذلك ان الزاويتين الكائنتين فى ه متساويتان لكونهما متقابلتين برأسيهما والزاويتين ا و ج متساويتان ايضا لان مقياس كل منهما نصف القوس بد فحينئذ الاضلاع المتناظرة من هذين المثلثين تفيد أن اه : هج :: هد : هب فاذن جزءآ احد الوترين يحدثان طرفى المناسبة وجزءآ الوتر الآخر يحدثان الوسطين

واذا كان احد الوترين مثل اب قطرا والوتر الآخر مثل جد عمودا عليه كما فى (شكل ٤٢) فانه يكون بالضرورة $\text{هج} = \text{هد}$

فاذن المتناسبة السابقة تصير هكذا اه : هج :: هج : هب

ومنه ينتج ان $\overline{\text{هج}}^{2} = \text{اه} \times \text{هب}$

وينتج من هذا ان كل عمود على القطر وسط متناسب بين الجزئين اللذين يحدثهما العمود على القطر وهذه الخاصية تنشأ بلا واسطة من خاصية المثلث اجب القائم الزاوية (انظر النمرة السابقة) وهذا المثلث يفيد ايضا ان الوتر اج وسط متناسب بين القطر اب والجزء اه المجاور له

(٥٥) اذا رسم من نقطة مفروضة خارج الدائرة خطان قاطعان لها ومنتهيان الى الجزء المقعر من المحيط كان هذان القاطعان بتمامهما متناسبين مع جزئيهما الخارجين على التعاكس

وذلك ان المثلثين ابد و هبج من (شكل ٤٣) فيهما زاوية

مشتركة

مشتركة هى ب والزاوية أ = ح كما فى (بند ٤٠) فاذن هذان المثلثان متشابهان كما فى (بند ٤٨) واضلاعهما المناظرة تفيد هذه المناسبة

أب : بح :: بد : به

فاذن احد الخطين القاطعين التامين وجزؤه الخارج عن الدائرة يكونان طرفين للمناسبة والقاطع الآخر وجزؤه الخارج يكونان وسطين لها

(٥٦) كل خط مماس للدائرة فهو وسط متناسب بين القاطع وجزئه الخارج

وذلك لان المثلثين احب و ادب من (شكل ٤٤) متشابهان لان فيهما زاوية مشتركة هى ب والزاوية ح المرسومة فى المحيط والزاوية بأد الحادثة من المماس والوتر مقياس كل منهما نصف القوس اد انظر بند (٤٠) و (٤١)

فاذن بح : اب :: اب : بد ومنها ينتج ان $\overline{اب}^2$ = بح × بد

في خواص الاشكال الكثيرة الاضلاع المنتظمة المرسومة فى داخل الدائرة وخارجها والنسبة التقريبية التى بين القطر والمحيط

(٥٧) الشكلان الكثيرا الاضلاع يكونان متشابهين اذا كانت زواياهما المناظرة متساوية واضلاعهما المناظرة متناسبة

(٥٨) كل شكلين كثيرى الاضلاع منتظمين ومتحدين فى عدد الاضلاع فهما متشابهان

مثال ذلك المسدسان ابحدهف و أَبَحَدَهَفَ المنتظمان كما فى (شكل ٤٥) فحيث ان مجموع زوايا احدهما مساو لمجموع زوايا الآخر وزوايا كل منهما مساوية لثمان زوايا قائمة بمقتضى بند (٤٤) تكون الزاوية ب ا ف هى سدس هذا المجموع وكذلك الزاوية بَ أَ فَ فاذن ب ا ف = بَ أَ فَ ومثل ذلك يقال فى باقى زوايا كثيرا الاضلاع فاذن هذان

المضلعان يكونان متساويى الزوايا ومن حيث ان انتظام هذين الشكلين يقتضى ان يكون ا ب = ب ج = الخ و أ بَ = بَ جَ = الخ تتركب بالبداهة متناسبة نظمها هكذا

ا ب : أ بَ :: ب ج : بَ جَ :: ج د : جَ دَ :: الخ

فحيث ان المضلعين المذكورين زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما المتناظرة متناسبة يكونان متشابهين انظر (بند ٥٧)

فينتج من هذه النسب المتتالية المتساوية متناسبة نظمها هكذا

ا ب + ب ج + ج د الخ + اف : أ بَ + بَ جَ + جَ دَ الخ + أ فَ :: ا ب : أ بَ فاذن تكون نسبة محيط الشكلين الكثيرى الاضلاع المنتظمين المتحدين فى عدد الاضلاع كنسبة اضلاعهما المتناظرة

(٥٩) كل شكل مضلع منتظم يمكن ان يرسم فى داخل الدائرة وخارجها

ولنفرض ان النقطة و هى مركز الدائرة التى محيطها يمر بالنقط ا و ب و ج الثلاث انظر (شكل ٤٥) فاذا كان المطلوب حينئذ اثبات مروره ايضا بالنقط د و ه الخ فلاجل اثبات ذلك ينزل عمود و ش على ب ج فيحدث شكلان ذوا اربعة اضلاع هما و ش ج د و و ش ب ا يكونان متساويين لاننا اذا طبقنا الشكلين ا ب ج د على بعضه من و ش فان النقطة ج تقع على ب لان ب ش = ج ش وبسبب مساواة زوايا كثير الاضلاع ينطبق الضلع ج د على ا ب والمستقيم و د على ا و لكن ا و نصف قطر فيكون و د كذلك نصف قطر فحينئذ المحيط الذى يمر بالنقط ا و ب و ج الثلاث يمر ايضا بالنقطة د

وبمثل هذا يبرهن على ان المحيط يلزم ان يمر بالنقطة ه وهكذا فاذن كل شكل كثير الاضلاع منتظم يمكن ان يرسم فى داخل الدائرة

ويظهر

ويظهر من ذلك ان جميع الاعمدة مثل وش النازلة من النقطة و التى هى مركز كثير الاضلاع على اضلاعه تكون متساوية فاذا جعلت النقطة و مركزا وبعد نصف قطر مثل وش رسمنا محيطا فان هذا المحيط يمس جميع اضلاع كثير الاضلاع فى منتصف كل منها ويكون كثير الاضلاع مرسوما على ذلك المحيط

ونصف قطر الدائرة المرسومة فى داخل كثير الاضلاع يسمى نصف قطر الشكل

وينتج من ذلك ان نسبة محيطى كثيرى الاضلاع المنتظمين المتحدين فى عدد الاضلاع كنسبة نصفى قطر الدائرتين المرسومتين فيهما وعليهما لان نسبة احد هذين المحيطين الى الآخر كنسبة ضلعيهما المتناظرين وهما اب و اَبَ وهذان الضلعان متناسبان لنصفى القطر وب و وَبَ أو وش و وَشَ

(٦٠) كل شكلين كثيرى الاضلاع متشابهين مركبان من مثلثات متحدة العدد ومتشابهة على التناظر وكائنة على وضع واحد .

فكثيرا الاضلاع ابه الخ و اَبَهَ الخ المتشابهان كما فى (شكل ٤٦) مركبان ضرورة من عدة واحدة من المثلثات التى على وضع واحد وذلك ان المثلث ت مشابه للمثلث تَ لان فى كل منهما زاوية مساوية لزاوية من الآخر وكائنة بين ضلعين متناسبين لنظيريهما منه فحينئذ الزاوية ححا = حَحَاَ

فاذن يكون اب : اَبَ :: بح : بَحَ

ومن تشابه الشكلين ينتج

اب : اَبَ :: به : بَهَ

فاذن بح : اَبَ :: به : بَهَ

فيكون المثلث ح مشابها للمثلث حَ بمقتضى بند (٤٩) وبمثل ذلك يبرهن

على ان المثلثين و و وَ يكونان متشابهين وهلم جرا

(٦١) ضلع المسدس المنتظم المرسوم فى دائرة يساوى نصف قطرها

وذلك لان الزاوية او ب المركزية من (شكل ٤٥) هى سدس اربع زوايا قائمة او ثلثا زاوية قائمة فاذن الزاويتان و ب ا و ب ا و الاخريان المتساويتان من هذا المثلث يساويان ٢ — $\frac{٢}{٣}$ او $\frac{٤}{٣}$ فكل واحدة = $\frac{٢}{٣}$ قائمة فاذن المثلث او ب يكون متساوى الاضلاع فاذن ضلع المسدس المرسوم فى الدائرة يساوى نصف قطر تلك الدائرة

(٦٢) ضلع المعشر المنتظم يساوى الجزء الاكبر من نصف قطر الدائرة المرسومة عليه المنقسم الى متناسبة ذات وسط وطرفين

ويقال ان الخط منقسم الى متناسبة ذات وسط وطرفين اذا كان جزؤه الاكبر وسطا متناسبا بين الجزء الآخر الاصغر والخط بتمامه

اذا ثبت ذلك فليكن اب من (شكل ٤٧) ضلع المعشر المنتظم فحينئذ الزاوية و هى عشر اربع زوايا قائمة او $\frac{٢}{٥}$ زاوية قائمة فبمقتضى بند (٤٣) يكون مقدار الزاويتين ا و و ب ا الاخريين المتساويتين ٢ — $\frac{٢}{٥}$ زاوية قائمة اى $\frac{٨}{٥}$ فيكون مقدار كل واحدة $\frac{٤}{٥}$

فاذا قسمنا الزاوية و ب ا الى قسمين متساويين بمستقيم ب م فان المثلث ب م و يكون بالبداهة مشابها للمثلث ا ب و لان الزاوية ا مشتركة بينهما والزاوية ا ب م = $\frac{٢}{٥}$ زاوية قائمة = و وايضا المثلث ب م و يكون متساوى الساقين فحينئذ يكون ا ب = ب م = م و لكن تشابه المثلثين ا ب و و ا ب م يفيدان او : اب :: اب : ام او او : م و :: م و : ام فاذن نصف القطر او منقسم فى النقطة م الى متناسبة ذات وسط وطرفين فيكون الضلع ا ب من المعشر المنتظم مساويا م و يعنى اكبر الجزئين

(٦٣) كل خط منحن او منكسر يحيط بخط محدب من طرفيه فهو اطول من الخط المحاط

والمراد

والمراد بالخط المحدب كل خط يقطع بمستقيم الا في نقطتين

وليكن الخط ام ب من (شكل ٤٨) هو الخط المحدب فانه لو لم يكن اصغر من جميع الخطوط المحيطة به للزم عليه وجود خط من هذه الخطوط اصغر من جميع الخطوط الاخرى فيكون اصغر من الخط ام ب او نهاية ما هنالك يكون مساويا له وليكن الخط ا م د ب هو الخط المحيط فلنصل بين هذين الخطين مستقيما ب ف لا يمكن ان يتلاقى مع ام ب ويمكن ان يمسه فقط فمن حيث ان هذا الخط المستقيم اقصر من ب م د ف ينتج ان الخط الحادث المحيط وهو ا ب ف ب اصغر من الاول وهو ا م د ب لكن هذا الاخير يلزم بالفرض ان يكون اصغر من الكل فاذن هذا الفرض باطل فاذن جميع الخطوط المحيطة تكون اطول من ام ب

وينتج من ذلك اولا انه يمكن وجود خط محيط يخالف الخط المحاط قليلا ما امكن وثانيا انه يمكن ان يرسم على الدائرة مضلع منتظم يكون الفضل بين محيطه ومحيط الدائرة وسطحه وسطح الدائرة اصغر من اي مقدار كان فالدائرة هي اذن نهاية كل مضلع كان مرسوما فيها او عليها

(٦٤) النسب التي بين محيطات الدوائر كالنسب التي بين اقطارها

ولذلك برهانان الاول ان يقال اذا اشرنا بالحرفين ط و ط َ لمحيطي المضلعين المتشابهين المرسومين بالتناظر على الدائرتين اللتين نصفا قطريهما ر و رَ فبواسطة ما تقدم يكون $\frac{ط}{طَ} = \frac{ر}{رَ}$ فاذا توهمنا ان عدة اضلاع هذين المضلعين كثيرة بحيث يكون الفاضل بين محيط كل منهما ومحيط الدائرة المرسوم عليها كل منهما اصغر من كل مقدار محدود امكن ان فاضل النسبة $\frac{س}{سَ}$ يعني محيطي الدائرتين عن النسبة $\frac{ط}{طَ}$ يعني محيطي المضلعين يمكن ان ينتهي الى اصغر ما يمكن وحيث ان هذا الفاضل هو ايضا فاضل النسبتين $\frac{س}{سَ}$ و $\frac{ر}{رَ}$

غير المتغيرتين لان ط/ط' = ر/ر' ينتج ان فاضل النسبتين الاخيرتين اقل من كل مقدار محدود فاذن هاتان النسبتان تكونان متساويتين فاذن

س/س' = ر/ر' او س : س' :: ر : ر' :: د : د'

البرهان الثانى وهو طريقة ثانية فى اثبات هذه الدعوى

اذا توهمنا فى مضلعين متشابهين مرسومين على دائرتين ان عدد اضلاعهما الاغير متناهية بمعنى انها اكبر من كل مقدار مفروض كان هذان الشكلان مختلفين اختلافا يسيرا عن محيطى الدائرتين المذكورتين ويمكن ان يقال على سبيل التساهل انهما متحدان مع محيطى الدائرتين فاذن يمكن اخذ محيطى هذين المضلعين بدل محيطى الدائرتين المذكورتين لكن بمقتضى دعوى بند (٥٩) تكون النسبة بين محيطى المضلعين كالنسبة بين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين عليهما وبهذا يثبت المطلوب

وينتج مما ذكر ان نسبة المحيط الى القطر متحدة فى جميع الدوائر فاذا اشرنا بالحرف ب لهذه النسبة او لمحيط دائرة قطرها يساوى ١ تركبت متناسبة نظمها هكذا

١ : ب :: ٢ ر : س او س = ٢ ب ر و ر = س/٢ب

فبواسطة هاتين المعادلتين يستخرج محيط الدائرة المشار له بالحرف س حين يعلم نصف قطرها المشار له بالحرف ر وكذا يستخرج نصف قطرها متى علم محيطها .

ثم على مذهب ارشميدس ان النسبة هى ب = ٢٢/٧ تقريبا يعنى انه اذا كان قطر الدائرة ٧ يكون محيطها بالتقريب ٢٢ وذلك ان هذا المهندس للتوصل الى استخراج هذه النسبة التقريبية رسم فى الدائرة وعليها مضلعا منتظما ذا ستة وتسعين ضلعا مبتدئا بالمسدس الذى ضلعه يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة عليه فوجدان محيط هذه الدائرة (٣ ١/٧٠ ن) و (٣ ١/٧١ ن) فافاد نسبة ١ : ٣ ١/٧ او ٧ : ٢٢ ثم بعد ذلك

وجدوا

وجدوا نسبا اقرب من هذه فتها نسبة متيوس فانه لما حسبها بالاعشارى خرجت النسبة $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ = ٣٫١٤١٥٩٢٩ وهذا الخارج تحديدى الى الرقم السادس من الاعشارى وفى الحساب الذى لا يحتاج الى غاية التدقيق لا يستعمل الا هذه النسبة الاخيرة التى ترجع الى هذه ب = ٣٫١٤

(٦٥) استخراج النسبة التقريبية التى بين القطر والمحيط يتوقف على معرفة حل قضيتين عمليتين

الاولى اذا علم وتر قوس امكن استخراج وتر نصفه

الثانية اذا علم محيط مضلع منتظم مرسوم فى دائرة معلومة امكن استخراج محيط مضلع آخر مشابه له مرسوم على محيط الدائرة

وبيان ذلك مذكور فى كتب الجبر

(الفصل الثالث)

(فى سطح كثير الاضلاع وسطح الدائرة)

(٦٦) المراد بالسطح هنا سطح الشكل بالنظر لمقداره

والشكلان المختلفان فى الصورة المتساويان فى السطح يقال لهما متكافئان

والشكلان المتشابهان اللذان يمكن انطباقهما على بعضهما يقال لهما متساويان

ومساحة السطح هى عبارة عن عدة اشتماله على سطح آخر معتبر وحدة مقياس وهذه الوحدة هى المربع

وارتفاع المثلث هو العمود النازل من رأس احدى زواياه على الضلع المقابل لها المسمى قاعدة ورأس الزاوية المقابلة للقاعدة تسمى رأس المثلث كما فى (الشكل ٥٠)

وارتفاع متوازى الاضلاع هو العمود الذى تقاس به المسافة التى بين ضلعيه المتقابلين المسميين قاعدتين كما فى (الشكل ٥١)

وارتفاع شبيه المنحرف هو العمود الواقع بين قاعدتيه اوضلعيه المتوازيين كما فى (الشكل ٥٢)

(٦٧) كل شكلين متوازيي الاضلاع متحدي القاعدة والارتفاع متكافئان

فليكن لمتوازيي الاضلاع ا ب ر د و ا ب ف من (شكل ٥٣) قاعدة واحدة هي ا ب وارتفاع واحد هو د غ ومعلوم انه بخاصية هذين الشكلين يكون الضلعان ا د و ب ر متساويين وكذلك الضلعان ب ح و ا ف كما في بند (٣١) ومعلوم ايضا اننا اذا طرحنا من الخطين د ر و ف ح المتساويين الجزء ر ف المشترك كان الباقيان وهما د ف و ر ح متساويين فحينئذ المثلثان ا د ف و ب ر ح اضلاعهما متساوية على التناظر فيلزم ان يكونا متساويين

فاذا طرحنا من ذي الاربعة اضلاع ا ب ح د المثلث ب ر ح ثم المثلث ا د ف المتساويين كان الباقيان ا ب ر د و ا ب ح ف متكافئين وبهذا يثبت المطلوب

ومن هنا ينتج ان كل متوازي اضلاع يكون مكافئا لمستطيل مثله في القاعدة والارتفاع

(٦٨) كل مثلث فهو نصف متوازي الاضلاع اذا كانت قاعدتهما واحدة وارتفاعهما كذلك

وذلك ان المثلثين ا ب ر و ا د ر من (شكل ٥٤) متساويان لكون اضلاعهما الثلاثة متساوية على التناظر فاذن يمكن ان يقال اولا ان المثلث هو نصف قائم الزوايا المتحد معه في القاعدة والارتفاع وثانيا ان جميع المثلثات المتساوية في القواعد والارتفاعات متكافئة

(٦٩) كل مستطيلين متحدين في الارتفاع فان نسبتهما كنسبة قاعدتيهما وبالعكس

فليكن المستطيلان ا د ر ب و ح ف ش ح كما في (شكل ٥٥) وارتفاعهما ا ب فاذا فرضنا ان الخط م مثلا هو وحدة مقياس خطي وداخل ٥ مرات في القاعدة ا ب و ٣ مرات في القاعدة ح ف واننا

من كل نقطة من نقط التقاسيم التي هي خ و ضه الخ و ط و ن اعمدة خ خَ و ضه ضَه الخ و ط طَ و ن نَ كانت المستطيلات ا خَ و خ ضَه الخ و ے طَ و ط نَ متساوية وكان كل من المستطيلين ا د و ے ش مشتملا على مستطيلات جزئية عدتها بقدر ما تشتمل قاعدته التي هي ا ب أو ے ف على خط م فحيث ان هاتين القاعدتين على نسبة مشتركة وهي ٥ : ٣ يكون المستطيلان ا د و ے ش على هذه النسبة بعينها ومن المعلوم انه يقال مثل ذلك في كل نسبة من هذا النوع وهذه القضية تكون ايضا صحيحة فيما اذا كانت قاعدة المستطيلات على نسبة غير مشتركة والبرهنة عليها تكون باستعمال طريق بند (٣٨) و (٤٦) يعني بترجيعه الى قياس الخلف فاذن يكون دائما ا ب د س : ے ف ش ح :: ا ب : ے ف

• واما عكس هذه القضية وهو ان المستطيلين المحدين في القاعدة تكون نسبتهما كنسبة ارتفاعيهما فبرهانه يكون باعتبار ح ے و س ا قاعدتي المستطيلين و ے ف و ا ب ارتفاعيهما

(٧٠) كل مستطيلين فان نسبتهما كنسبة حاصلي ضرب قاعدتيهما في ارتفاعيهما

فلنفرض أن قاعدتي المستطيلين ا ب س د و ے ف ح كما في (شكل ٥٦) متصلتان اي انهما على مستقيم واحد وهو ا ے ونتمم رسم المستطيل ا د ش ے الاكبر فالمستطيلان ا س و س ش من حيث ان ارتفاعهما واحد وهو ا د تكون نسبتهما كنسبة قاعدتيهما وكذلك المستطيلان س ش و س ف من حيث ان قاعدتهما واحدة تكون نسبتهما كنسبة ارتفاعيهما فحينئذ صار معنا من جهة

ا ب س د : ے ش س :: ا ب : ے ومن جهة اخرى

ے ش س : ے ف ح :: س ه : ے ح

فاذا ضربنا حدود هاتين المتناسبتين في بعضها على الترتيب وحذفنا المكرر

المشترك تحصل معنا

ا ب ب د : ب ء ف ح :: ا ب × ب ب : ب ء × ب ح

وهذا هو البرهان على القضية المذكورة

فاذا كان الشكل المستطيل ب ء ف ح مربعا اخذ بالعادة الضلع ب ء وحدة للمقياس الخطى فاذن تصير المتناسبة السابقة هكذا

ا ب د : ب ء ف ح :: ا ب × ب ب : ١

فحينئذ اذا قسنا الخطين ا ب و ب ب بالوحدة ب ء كان الحاصل وهو ا ب × ب ب دالاعلى عدة مرات دخول وحدة السطح اى مربع ب ء ف ح فى المستطيل ا ب د ولاجل الاختصار يقال ان سطح المستطيل يساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

ولاجل تحقيق ذلك نفرض ان ا ب = ٥ امتار وان ب ب = ٣ امتار فسطح المستطيل ا ب د تكون نسبته للمربع ب ء ف ح كنسبة ٣ × ٥ الى ١ واسهل ما يقال فى ذلك ان سطح هذا المستطيل يكون ١٥ مترا مربعا كما فى (شكل ٥٧)

وبمجرد النظر فى الشكل يظهر بالبداهة انه متى كانت قاعدة المستطيل وارتفاعه مشتركين كانت مساحة هذا المستطيل هى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

وينتج مما تقدم ان سطح المربع يساوى مربع ضلعه

(٧١) سطح كل متوازى الاضلاع يساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

وذلك ان متوازى الاضلاع ا ب د مكافىء للمستطيل ا ف ء المتحد معه فى القاعدة ا ب وفى الارتفاع ا ء كما فى (شكل ٥٨)

فحينئذ يكون ا ب × ا ء مساحة سطح متوازى الاضلاع ا ب د

(٧٢) سطح كل مثلث يساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه

وذلك ان المثلث ا ب ب هو نصف متوازى الاضلاع ا ب د المتحد

معه فى القاعدة اب وفى الارتفاع دى كما فى (شكل ٥٤) فاذن يكون

اب × $\frac{دى}{٢}$ عبارة عن سطح المثلث ابح

(٧٣) سطح شبه المنحرف يساوى ارتفاعه مضروبا فى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين

وذلك لان شبه المنحرف ابحد من (شكل ٥٩) مركب من المثلثين ابح و احد ومساحة الاول $\frac{اب}{٢}$ × دى ومساحة الثانى $\frac{دح}{٢}$ × دى فيكون سطح شبه المنحرف ابحد = $\left(\frac{اب+حد}{٢}\right)$ × دى

فاذا رسمنا من النقطة ش التى هى منتصف القطر اح خطا ع ك موازيا للقاعدتى شبه المنحرف وهما اب و حد ظهران شك = $\frac{اب}{٢}$ و عش = $\frac{حد}{٢}$ كما فى (بند ٤٨) فاذن عك = $\frac{اب+حد}{٢}$ فحينئذ يكون سطح شبه المنحرف مساويا ايضا للخط الواصل بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين مضروبا فى ارتفاع ذلك الشبه المنحرف

(٧٤) سطح كثير الاضلاع المنتظم يساوى نصف حاصل ضرب محيطه فى نصف قطره

وذلك لان المثلثات اوب و بوح الخ من (شكل ٥٤) حيث انها متساوية فسطح كثير الاضلاع المنتظم وهو ابحد الخ يساوى سطح المثلث اوب مضروبا فى عدة اضلاع كثير الاضلاع المذكور ومن حيث ان سطح المثلث اوب = اب × $\frac{وش}{٢}$ يكون سطح كثير الاضلاع = ٦ اب × $\frac{وش}{٢}$ لكن ٦ اب هو محيط كثير الاضلاع و $\frac{وش}{٢}$ هو نصف قطره او ربع قطر الدائرة المرسومة فيه فيثبت المطلوب وعلى كل حال فسطح كل شكل كثير الاضلاع مرسوم على دائرة يساوى حاصل ضرب محيطه فى ربع قطر تلك الدائرة

(٧٥) سطح الدائرة يساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها ولذلك برهانان

الاول مبنى على مقدمة يقينية هى ان كل مقدارين غير متغيرين مثل ا و ب اذا كان هناك مقدار متغير اكبر من كل منهما مثل خ واشتد قربه من اصغرهما يكونان متساويين

بيانه اولا ان يفرض ا > ب ثم ترتب المقادير الثلاث بحسب عظمها هكذا ب < ا و ا < خ فاذا اخذنا المتغير وهو خ وفرضنا ان خ ــ ب اصغر من كل مقدار مفروض مثل ص كما هو ممكن فالفاضل ا ــ ب يكون من باب اولى < ص

وثانيا ان يفرض عكس ذلك اى ا < ب ثم ترتب هذه المقادير على حسب عظمها هكذا ا < ب و ب < خ فاذا اخذنا خ على وجه ان خ ــ ا يكون اصغر من ص ايضا فمن باب اولى ب ــ ا يكون اصغر من ص ومن حيث ان الفاضل بين ا و ب اصغر من كل مقدار مفروض مثل ص فايا ما بلغ هذا المقدار فى الصغر ينتج انه كالعدم وان ا = ب .

ثم نقول الآن من حيث انه بمقتضى الدعوى النظرية التى فى بند (٦٣) يمكن توهم مضلع منتظم بل وغير منتظم مرسوم على دائرة نصف قطرها ر بحيث يكون ط وهو محيط المضلع مختلفا ايضا قليلا ما امكن عن س وهو محيط الدائرة فزيادة حاصل ط × $\frac{1}{2}$ ر على الحاصل غير المتغير وهو س × $\frac{1}{2}$ ر يمكن ان تكون اقل من كل مقدار مفروض وايضا سطح هذا المضلع بعينه الذى هو دائما اكبر من سطح الدائرة يمكن ان يقرب من سطح الدائرة ما امكن فالحواصل $\frac{1}{2}$ ط ر و $\frac{1}{2}$ س ر وسطح الدائرة تكون ثلاثتها مرتبة كترتيب مقدار خ المتغير ومقدارى ا و ب فيكون حاصل $\frac{1}{2}$ س ر هو المساحة الحقيقية لسطح الدائره

البرهان الثانى مبنى على طريقة اللاتناهى وذلك ان نتوهم مضلعا منتظما ذا اضلاع غير متناهية مرسوما على دائرة فان محيط ذلك المضلع يختلف عن محيط الدائرة اختلافا قليلا لا نهائيا فاذن يمكن اقامة هذا المضلع مقام

الدائرة

الدائرة فبموجب بند(٧٤) يكون سطح الدائرة مساويا لمحيطها مضروبا في ربع قطرها

فاذا اشرنا بالحرف ب لمحيط الدائرة التي قطرها يساوي واحدا وبالحرف ر لنصف قطر دائرة اخرى وبالحرف س لمحيطها فبمقتضى بند(٢٤) يكون س = ٢ ب ر وسطح الدائرة = $\frac{1}{2}$ س ر فحينئذ يكون

$\frac{1}{2}$ س ر = ب ر^{2} يعني ان سطح الدائرة يساوي ايضا حاصل مربع نصف قطرها مضروبا في النسبة

(٧٦) سطح قطع الدائرة يساوي حاصل ضرب قوسه في ربع قطره

وذلك ان نسبة القطع ا س م من (شكل ١٨) الى الدائرة بتمامها كنسبة القوس ام الى المحيط بتمامه أو كنسبة القوس ا × $\frac{1}{2}$ ا س الى محيط ا س × $\frac{1}{2}$ ا س لكن سطح الدائرة = ا س × $\frac{1}{2}$ ا س (بمقتضى النمرة السابقة) فاذن سطح القطع ا س م = القوس ا × $\frac{1}{2}$ ا س واما سطح القطعة ام فيظهر انه مساو لسطح القطع ا س م ناقصا سطح المثلث ا س

(الفصل الرابع)

(في مقابلة سطوح الاشكال المتشابهة)

(٧٧) المربع المرسوم على وتر القائمة من المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المرسومين على الضلعين الآخرين

وهذه الدعوى قد برهن عليها في (بند ٥٣) ولنبرهن عليها هنا بوجه سهل فنقول

ليكن المثلث ا س من (شكل ٦٠) قائم الزاوية في ا وليكن مرسوما على كل ضلع من اضلاعه مربع فاذا انزلنا من النقطة ا على ف ح عمودا ا ى ووصلنا المستقيمين ا ف و س ل كان المثلثان ا س ف و س ل متساويين لان في كل منهما زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر وكائنة بين ضلعين مساويين لنظيريهما منه وذلك لان الزاوية ل س =

للزاوية ا ب ف والضلع ب ل = للضلع ب ا والضلع ب ب = ب ف لكن المثلث ل ب ب هونصف مربع ا ب ل ك لانهما متحدان فى القاعدة والارتفاع وبمثل ذلك يبرهن على ان المثلث ا ب ف نصف المستطيل ب د ح ف فاذن يكون المربع ا ل مكافئا للمستطيل ب ح ويبرهن بمثل ذلك على ان المربع ا ه مكافئ المستطيل ح ح فيكون المربع ب ح مساويا للمربع ا ه + المربع ا ل يعنى ان

$$\overline{ب ب}^٢ = \overline{ا ب}^٢ + \overline{ا ب}^٢$$

وينتج من ذلك ان مربع احد ضلعى الزاوية القائمة يساوى مربع وترها ناقصا مربع الضلع الآخر يعنى ان

$\overline{ا ب}^٢ = \overline{ب ب}^٢ - \overline{ا ب}^٢$ وهذه الصيغة ناتجة من كون سطح المربع يساوى مربع قاعدته بمقتضى (٧٠) فحينئذ يكون المربع المرسوم على قطر اى مربع ضعف المربع المرسوم على ضلعه او يقال ان نسبة قطر المربع الى ضلعه :: $\sqrt{٢}$: ١ فاذن قطر المربع وضلعه على نسبة غير مشتركة

واما غير ذلك من خواص المثلث القائم الزاوية فقد سبق توضيحه

(٧٨) مربع الضلع المقابل للزاوية الحادة من كل مثلث يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين ناقصا ضعف حاصل ضرب الضلع الذى يقع عليه العمود فى القسم المجاور لتلك الزاوية

وذلك ان المثلثين ا ب د و د ب ب من (شكل ٦١) من حيث انهما قائما الزاوية يفيدان هاتين المعادلتين

$$\overline{ا ب}^٢ = \overline{ا د}^٢ + \overline{ب د}^٢ \quad و \quad \overline{ب د}^٢ = \overline{ب ب}^٢ - \overline{ب د}^٢$$

فاذا وضعنا مقدار $\overline{ب د}^٢$ الاخير فى مقدار $\overline{ا ب}^٢$ الاول صار هكذا

$$\overline{ا ب}^٢ = \overline{ا د}^٢ + \overline{ب ب}^٢ - \overline{ب د}^٢$$

لكن

لكن (فى شكل ٦١) الجزؤ اد = اب ـ بد وفى (شكل ٦٢)
الجزؤ اد = بد ـ اب فاذن يكون فى الصورتين

$$\overline{\text{اد}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 - 2\,\text{اب} \times \text{بد} + \overline{\text{بد}}^2$$

ثم يغير فى هذه الصيغة المقدار $\overline{\text{اج}}^2$ الثانى بهذا المقدار وهو

$$\overline{\text{اج}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 - 2\,\text{اب} \times \text{بد}$$

وهذا ما اردنا بيانه

(٧٩) مربع الضلع المقابل للزاوية المنفرجة فى كل مثلث منفرج الزاوية يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين زائدا ضعف حاصل ضرب القاعدة فى الجزء المجاور لتلك الزاوية كما فى (شكل ٦٢)

وبرهان ذلك كما تقدم فى الدعوى السابقة ان يقال

$$\overline{\text{بج}}^2 = \overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 \quad \text{و} \quad \overline{\text{جد}}^2 = \overline{\text{اج}}^2 - \overline{\text{اد}}^2$$

فينتج من ذلك ان $\overline{\text{بج}}^2 = \overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 - \overline{\text{اد}}^2$

لكن بد = اب + اد أو $\overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + 2\,\text{اب} \times \text{اد}$

فاذن يكون $\overline{\text{بج}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 + 2\,\text{اب} \times \text{اد}$ وهو المطلوب

(٨٠) كل مثلث مدّ من راسه الى منتصف قاعدته خط مستقيم كان ضعف مجموع مربع هذا الخط وضعف مربع نصف القاعدة مساويا لمجموع مربعى الضلعين الآخرين

ولتكن ه منتصف الخط اب الذى هو قاعدة المثلث ابج من (شكل ٦٣) والخط جد هو ارتفاعه فالمثلث هجب بمقتضى بند (٧٨) يفيد هذه المعادلة

$$\overline{\text{جب}}^2 = \overline{\text{جه}}^2 + \overline{\text{هب}}^2 - 2\,\text{هب} \times \text{هد}$$

والمثلث ابج بمقتضى بند(٧٩) يفيد هذه المعادلة

$$\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 + ٢\ \text{اج} \times \text{جد}$$

فاذا جمعنا هاتين المعادلتين واعتبرنا ان اج = جه كان

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{به}}^2 = ٢\ \overline{\text{بج}}^2 + ٢\ \overline{\text{اج}}^2$$

وهو المطلوب

وينتج من ذلك ان متوازى الاضلاع مجموع مربعات اضلاعه يساوى مجموع مربعى قطريه

(٨١) النسب التى بين سطحى المثلثين المتشابهين كالنسب التى بين مربعى الضلعين المتناظرين

وذلك لان المثلثين اجب و اَجَبَ من (شكل ٦١) حيث كانا متشابهين يحصل منهما متناسبة نظمها هكذا

اج : اَجَ :: اب : اَبَ

وايضا من حيث ان المثلثين ابد و اَبَدَ متساويا الزوايا يحصل منهما متناسبة نظمها هكذا

بد : بَدَ :: اب : اَبَ

فاذا ضربنا هاتين المتناسبتين على الترتيب تحصل

$$\text{اج} \times \text{بد} : \text{اَجَ} \times \text{بَدَ} :: \overline{\text{اب}}^2 : \overline{\text{اَبَ}}^2$$

لكن حيث ان اج × بد ضعف سطح المثلث ابج وان اَجَ × بَدَ ضعف سطح المثلث اَبَجَ ايضا ينتج ان النسبة بين سطحى المثلثين المتشابهين كالنسبة بين مربعى الضلعين المتناظرين

(٨٢) النسب التى بين سطحى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسب التى بين مربعى ضلعين متناظرين منهما

وحيث ان كثيرى الاضلاع ابدج و اَبَدَجَ من

(شكل ٤٦)

(شكل ٤٦) متشابهان فهما مركبان من عدة واحدة من مثلثات

ث و ح و د و ثَ و حَ و دَ متشابهة على التناظر وموضوعة بوضع واحد فاذن يحصل بمقتضى الدعوى السابقة

ث : ثَ :: اب² : اَبَ²

ح : حَ :: ب س² : بَ سَ²

د : دَ :: س د² : سَ دَ²

وجميع هذه المتناسبات متساوية لان الشكلين الكثيرى الاضلاع حيث انهما متشابهان يكون

اب : اَبَ :: ب س : بَ سَ الخ

أو اب² : اَبَ² :: ب س² : بَ سَ² الخ

فاذن نسبة مجموع المقدمات التي هي ث + ح + د اى كثير الاضلاع

اب س د ى الى مجموع التوالى التي هي ثَ + حَ + دَ اى كثير

الاضلاع اَبَ سَ دَ ىَ كنسبة المقدم وهو اب² : تاليه اَبَ² وبهذا يثبت المطلوب

(٨٣) النسب التي بين سطحى دائرتين كالنسب التي بين مربعى نصفى قطريهما او مربعى قطريهما او مربعى محيطيهما

فقد تقدم فى بند (٧٥) ان سطح الدائرة المشار له هنا بالحرف س = ب ر²

باعتبار ان ر نصف قطر الدائرة وان ب هى نسبة المحيط الى القطر

فاذا فرضنا دائرة اخرى نصف قطرها رَ كان بمقتضى ذلك سَ = ب رَ²

فاذن ينتج من هاتين المعادلتين متناسبة نظمها هكذا

س : سَ :: ب ر² : ب رَ² :: ر² : رَ²

لكن حيث انه بمقتضى دعوى بند (٦٤)

$$\text{ر} : \text{رَ} :: \text{س} : \text{سَ}$$

أو $$\text{ر}^{2} : \text{رَ}^{2} :: \text{س}^{2} : \text{سَ}^{2}$$

وان النسب بين انصاف الاقطار كالنسب بين الاقطار يكون ايضا

$$\text{ر}^{2} : \text{رَ}^{2} :: \text{ء}^{2} : \text{ءَ}^{2}$$

فبسبب مساواة هذه المتناسبات يكون

$$\text{س} : \text{سَ} :: \text{ء}^{2} : \text{ءَ}^{2} :: \text{س}^{2} : \text{سَ}^{2}$$

وبهذا يثبت المطلوب

(الفصل الخامس)

في دعاوى عملية هندسية متعلقة بالدعاوى النظرية المتقدمة

(حل الدعاوى العملية بالعمل)

(٨٤) كيف تستخرج النسبة بين مستقيمين

قبل الشروع في ذلك ينبغي ان يعلم ان مساحة البعد بين النقطتين الذى هو عبارة عن طول المستقيم المرسوم على الارض او على الورق هى البحث عن عدة مرات اشتماله على مستقيم آخر مأخوذ وحدة مقياس اصطلاحى كالميتر المعلوم المنقسم الى اعشار واعشارا عشار وهكذا وهو مقياس الاطوال فحينئذ اذا اردنا معرفة البعد بين نقطتين ا و ب على الارض نضع المتر على الخط اب ما امكن من المرات فان بقى شئ فانه يقدر باجزاء هذا المقياس

وكيفية رسم الخط اب على الارض ان تغرس اوتاد مستقيمة فى الارض قائمة عليها بحيث ان اول وتد منها يستر ما عداه بالتحرير فحينئذ مواقع هذه الاوتاد تكون على خط واحد مستقيم فيما اذا كان سطح الارض افقيا أو ذا ميل واحد وهذه الاوتاد تكون دائما موجودة فى مستو واحد قائم على سطح الارض

ومن

ومن هنا يظهر ان النسبة بين خطين هى عبارة عن النسبة بين العددين الدالين على عدة مرات دخول خط آخر من نوع واحد فى هذين الخطين فاذا كان طول يساوى ٥ر١٨م وآخر يساوى ٥ر٢٠م كانت النسبة بين هذين الطولين كنسبة ٥ر١٨ : ٥ر٢٠ :: ١٨٥٠ : ٥٢٠ :: ٧٤ : ٢١

فاذا كان هذان الخطان مرسومين على الورق امكن استخراج النسبة التى بينهما سواء كانت تحديدية او تقريبية بالقاعدة الحسابية المستعملة فى استخراج القاسم الاعظم المشترك بين عددين

(٨٥) ما كيفية رسم مثلث اذا علمت اضلاعه الثلاثة

لتكن الخطوط الثلاثة م و ة و ط من (شكل ٦٥) فترسم اولا اب = م ونجعل النقطة ا مركزا وببعد نصف قطر يساوى ة نرسم قوسا ضظ ثم نجعل ايضا النقطة ب مركزا وببعد نصف قطر يساوى ط نرسم قوسا آخر مثل تخ يقطع الاول فى النقطة س فاذا مددنا مستقيمين سا و سب حدث مثلث اب س هو المثلث المطلوب

ويظهر من هذا العمل ان القوسين ضظ و تخ لا يمكن تقاطعهما وحدوث المثلث الا اذا كان اكبر الخطوط المفروضة اصغر من مجموع الخطين الآخرين

(٨٦) كيف ينصف خط مستقيم معلوم

كيفية ذلك ان يجعل كل من نهايتى الخط اب من (شكل ٦٦) مركزا وببعد نصف قطر اكبر من نصف هذا الخط نرسم قوسين يتقاطعان فوق الخط وتحته فى نقطتين س و ى فحينئذ يكون المستقيم سى عمودا على اب وذلك لان النقطتين س و ى من حيث ان بعدهما عن النقطتين ا و ب واحد بالعمل يلزم ان يكون وقوعهما على العمود القائم على منتصف اب كما فى بند (٢٤) لكن حيث ان النقطتين يعينان امتداد

الخط المستقيم يكون ب د مضعفا للمستقيم ا ب

(٨٧) كل نقطة مفروضة على خط مستقيم لنا ان نخرج منها عمودا على ذلك الخط

فنأخذ على يمين النقطة ب المفروضة ويسارها جزئين متساويين وليكونا ب د و اب كما في (شكل ٦٧) ثم نجعل كلا من النقطتين ا و د مركزا وببعد نصف قطر اكبر من اب نرسم قوسين يتقاطعان في ح فيكون المستقيم ب ح هو العمود المطلوب لان النقطة ح من حيث ان بعدها واحد من النقطتين ا و د بالعمل تكون واقعة على العمود القائم على منتصف اد فاذن ب ح هو العمود المطلوب

(٨٨) كيف تنزل من نقطة مفروضة خارج خط مستقيم عمودا على ذلك المستقيم

فنجعل نقطة ب المفروضة خارج المستقيم ا ب من (شكل ٦٨) مركزا وببعد نصف قطر يكون كافيا في التقاطع نرسم قوسا يقطع ا ب في نقطتين ح و ف ثم نجعل كلا من هاتين النقطتين مركزا وببعد نصف قطر اصغر من ح ف نرسم قوسين آخرين يتقاطعان في د فيكون المستقيم ب د عمودا على منتصف ح ف فهو عمود ايضا على المستقيم ا ب وذلك لان النقطتين ب و د بعد كل منهما عن نقطتي ح و ف واحد

(٨٩) كل نقطة مفروضة لنا ان نرسم منها خطا موازيا لخط مستقيم مفروض

فنجعل النقطة ت المفروضة مركزا وببعد نصف قطر كاف مثل ب ب من (شكل ٦٩) نرسم قوسا غير محدود وليكن ب د ثم نجعل النقطة ب ايضا مركزا وببعد هذا النصف قطر بعينه نرسم قوسا ت ا ونأخذ من القوس غير المحدود ب د = ا ب ونرسم مستقيما ب د فيكون هو الموازى المطلوب

وبيان ذلك ان الزاويتين ب ب د و ا ب ت المتبادلتين بالدخول

متساويتان

متساويتان بالعمل فاذن الخطان ا ب و س ى هما متوازيان

وهنا طريقة اخرى فى حل هذه الدعوى العملية وهى ايضا صحيحة فى العمل وهى ان نجعل النقطة س مركزا وببعد نصف قطر نرسم قوسا خ ض مماسا للخط ا ب كما فى (شكل ٧٠) وكذا نجعل النقطة ف المفروضة على الخط ا ب مركزا وببعد نصف القطر بعينه نرسم قوسا ظ ث ثم نضع مسطرة تكون حافتها مارة بالنقطة س ومماسة للقوس ظ ث فالمستقيم س ى المعين بهذه الطريقة هو الموازى المطلوب

(٩٠) كيف نرسم من نقطة مفروضة خارج خط مستقيم خطا يحدث منه مع الاول زاوية تساوى زاوية معلومة

فلتكن س هى النقطة المفروضة خارج المستقيم ا ب كما فى (شكل ٧١) و م هى الزاوية المفروضة فلنعين على الخط ا ب نقطة كيف كانت ولتكن ى ونرسم منها مستقيما ى ے بحيث ان الزاوية ے ى ب = م ثم نرسم من النقطة س مستقيما س ش موازيا ى ے فحينئذ الزاوية س ش ى = ے ى ب وهذا هو حل الدعوى

(٩١) كيف تقسم الزاوية الى قسمين متساويين

لاجل تقسيم الزاوية ب ا س من (شكل ٧٣) الى قسمين متساويين نجعل رأسها وهى ا مركزا وببعد نصف قطر كيف كان نرسم قوسا م ه ثم نجعل كلا من النقطتين م و ه مركزا وببعد نصف قطرا اكبر من نصف م ه نرسم قوسين يتقاطعان فى ى ونصل ا ى فحينئذ المستقيم ا ى يقسم الزاوية ب ا س الى قسمين متساويين

وبرهان ذلك ان يقال حيث ان النقطتين ا و ى بعدهما واحد من طرفى الوتر م ه يكون المستقيم ا ى عمودا على منتصف هذا الوتر فاذن هو يقسم القوس م ه والزاوية ب ا س الى قسمين متساويين

وبهذا العمل يمكن تقسيم اى قوس الى اربعة اقسام متساوية او ثمانية او ستة عشر الخ

(٩٢) كيف نقيم عمودا على نهاية خط مستقيم من غير ان نمده فلنعين نقطة ب من (شكل ٧٤) بحيث تكون فى داخل القائمة جـ ا ـ التى تحدث من الخط المفروض والعمود المطلوب ثم نجعل هذه النقطة مركزا وببعد نصف قطر يساوى اب نرسم محيطا ا د هـ جـ ومن النقطة د التى قطع فيها المحيط المستقيم ا ـ نرسم قطرا د جـ ثم نصل بين النقطتين ا و جـ بخط مستقيم فيكون المستقيم ا جـ عمودا على ا ـ وذلك ان الزاوية جـ ا د المرسومة فى المحيط مساحتها ربع محيط ا د هـ جـ فاذن هذه الزاوية قائمة بمقتضى بند (٣٨) و (٤٠)

فاذا اردت حل هذه الدعوى العملية على الارض فلتضع نفسك فى جهة مثل ب ثم تمد حبلا بطول اب من ب الى د على وجه ان د يكون على استقامة ا ـ ثم تمد هذا الحبل من ب الى جـ على استقامة ب د المعلمة بالاوتاد فحينئذ المستقيم ا جـ يكون هو العمود المطلوب ولا يخفى ان هذا العمل يرجع الى السابق

(٩٣) كيف يرسم من نقطة مفروضة خط مماس لدائرة

اذا كانت النقطة ا من (شكل ١٩) على المحيط فكيفية ذلك ان ترسم نصف قطر مثل اب وتقيم عليه عمودا ا ـ يكون هو المماس المطلوب فى النقطة ا بموجب (٣٦)

واذا كانت ا خارج المحيط فكيفية ذلك ان تصل بين هذه النقطة و ب التى هى مركز الدائرة المفروضة بمستقيم اب وترسم على الخط اب الذى هو بمنزلة القطر محيطا ا ب د كما فى (شكل ٧٥) فان المستقيمين ا ـ و ا د الواصلين بين النقطة ا المفروضة ونقطتى تقاطع الدائرتين يكونان مماسين للدائرة ب ـ الاولى لان كلا من الزاويتين ب ت ا و ب د ا قائمة بمقتضى بند (٣٨) و (٤٠) والمثلثان ا ب ـ و ا د ب من حيث انهما متساويان ينتج ان الزاويتين ـ ا ب و د ا ب تكونان ايضا متساويتين فاذن لاجل ان تمس دائرة اضلاع زاوية يلزم ان يكون مركزها

على

على الخط المستقيم الذى يقسم هذه الزاوية قسمين متساويين

(٩٤) كيف ترسم دائرة فى مثلث

ينتج من حل الدعوى العملية السابقة انه لاجل رسم دائرة فى مثلث يجب قسمة زاويتين من زوايا هذا المثلث الى قسمين متساويين لان نقطة تقاطع خطى القسمة هى مركز الدائرة المطلوبة

واما نصف القطر وهو ولـ من هذه الدائرة فمعلوم انه يكون مساويا للعمود النازل من المركز و على احد الاضلاع وهو اب من المثلث ابـ كما فى (الشكل ٧٦)

(٩٥) كيف نرسم محيطا يمر بثلاث نقط مفروضة على خط غير مستقيم

لتكن النقط المفروضة ا و ب و ‍ حـ من (شكل ٧٧) فصلها بمستقيمين اب و بحـ وعلى منتصف كل منهما أقم عمودين ء ى و حف فالنقطة و التى هى نقطة تقاطع هذين العمودين تكون على بعد واحد من النقط ا و ب و حـ الثلاث فهى مركز الدائرة المبحوث عنها

ولا تعسر البرهنة على انه لا يمكن الامرور محيط واحد بالنقط ا و ب و حـ الثلاث ومن المعلوم انه اذا كانت هذه النقط الثلاث على خط مستقيم فالدعوى العملية غير ممكنة

وبطريقة البرهنة المتقدمة يبرهن على الدعوى العملية التى الغرض منها مرور محيط برؤس ثلاث زوايا من مثلث او استخراج مركز دائرة أو قوس

فالنقط ا و ب و حـ المفروضة على الارض المتباعدة عن بعضها كثيرا اذا لزم رسم محيط يمر بها فاسح بواسطة الغرافومتر زاوية ابحـ من (شكل ٧٨) واختر نقطا اخرى مثل بَ يكون العرضان ا و حـ منظورين منها كما ينظران من الزاوية ب يعنى بحيث تكون ابحـ = ابَحـ فمجموع هذه النقط يحدد قوس الدائرة المطلوبة التى ترسم بعد ذلك كما يراد

ولاجل تكميل المحيط تفرض ايضا نقطا اخرى مثل د و دَ بحيث تكون

كل زاوية من الزوايا ا و ح و ب و ا و ت و ب الخ مساوية لباقي طرح الزاوية ت من القائمتين

(٩٦) كيف ترسم قطعة دائرة على خط مستقيم مفروض تحتوي على زوايا تساوي زاوية معلومة

فليكن ا ب المستقيم المفروض و ب الزاوية المفروضة والغرض ان ترسم على هذا المستقيم القوس اكب بحيث تكون فيه كل الزوايا المرسومة وهي ك و كَ الخ مساوية للزاوية ب كما في (شكل ٧٩)

فارسم الزاوية م ا ب = ب واقم ا و عمودا على ا م واقم كذلك و ى عمودا على منتصف ا ب فالنقطة و المشتركة بين هذين العمودين تكون مركز القوس اكب المطلوب

وذلك لان الزاويتين م ا ب و ك متساويتان لان مساحة كل منهما نصف القوس ا ى ب كما في بند (٤٠) و (٤١) ولكن بالعمل م ا ب = ب فاذن ك = ب

ويستعمل هذا الحل في اخذ صورة الارض كما سيأتي

(٩٧) كيف يستخرج خط متناسب رابع لثلاثة خطوط مفروضة

لتكن الخطوط الثلاثة المفروضة م و ى و ط من (شكل ٨٠) فعلى الضلع خ ا من الزاوية ا المختارة خذ مبتدئا من النقطة ا الخطين م و ى الاولين على التعاقب وعلى الضلع ا ض الآخر خذ مبتدئا كذلك من النقطة ا الخط ط الثالث وصل بخط بين طرفي م و ط وبطرف ى ارسم ى ى على الموازاة من ب ب فالجزء ب ى يصير المتناسب الرابع المطلوب لانه بسبب توازي ى ى و ب ب يكون م : ى :: ط : خ

وبمثل هذا الوجه يستخرج المتناسب الثالث للخطين ا و ب المفروضين لانه عين المتناسب الرابع للثلاثة خطوط ا و ب و ب

(٩٨) كيف يقسم خط مفروض الى اجزاء متساوية كما يراد

ليكن

ليكن المطلوب قسمة الخط اب من (شكل ٨١) الى خمسة اجزاء متساوية فبالطرف ا ارسم مستقيما اس غير متناه وخذ على هذا المستقيم خمس اجزاء متساوية مثل خط ا ا وصل بين النقطة س التى هى آخر نقط القسمة والنقطة ب التى هى طرف المستقيم اب وارسم د ا موازيا ب س فبهذا يصير اد خامس جزء من اب كما فى بند (٤٦)

وهذه الطريقة يمكن تنويعها ولنذكر طريقة اخرى صحيحة محررة جدا فى الاستعمال فنقول

ليكن اب من (شكل ٨٢) دائما هو الخط المطلوب قسمته فارسم كما تريد مستقيما ب د غير متناه ومن النقطة ا ارسم مستقيما اى موازيا ب د وضع على كل خط من هذه المتوازيات خمسة اجزاء متساوية وصل جميع نقط القسمة المتقابلة بمستقيمات اد و هو و سط و حل و مق فحيث انها متوازية ومتساوية الابعاد تقسم اب الى خمسة اجزاء متساوية كما فى (شكل ٨٢)

(٩٩) كيف يرسم من نقطة مفروضة فى داخل زاوية معلومة خط مستقيم جزآه الداخلان بين تلك النقطة وضلعى الزاوية متساويان

فلتكن د هى النقطة المفروضة فى داخل الزاوية ب ا س من (شكل ٨٣) فيرسم من هذه النقطة خط دى مواز اى ويجعل ى ف = اى ويرسم مستقيم ف د و فيصير بالضرورة منقسما الى قسمين متساويين فى النقطة د انظر بند (٤٦)

(١٠٠) كيف يرسم على خط مستقيم مفروض مثلث مشابه لمثلث مفروض ليكن ا س ب من (شكل ٦١) المثلث المفروض والغرض ان يرسم على اَبَ مثلث اَبَسَ مشابه للاول فلاجل ذلك ترسم زاوية ا = اَ وزاوية ب = بَ بمقتضى بند (٨٩) فالمستقيمان اَسَ و بَسَ يتلاقيان فى النقطة سَ التى تصير مناظرة للنقطة س وبهذا تنحل الدعوى العملية

لكن يمكن بطريقة اسهل من تلك عمل مثلث اَ بَ سَ مشابه للمثلث ا ب س بالبحث اولا عن المتناسب الرابع للثلاثة خطوط ا ب و ا م و اَ بَ ثم عن المتناسب الرابع الاخر للثلاثة خطوط ا ب و ب س و اَ بَ فحينئذ يتوصل الى معرفة الاضلاع الثلاثة من المثلث اَ بَ سَ الذى يعمل بواسطة الطريقة المذكورة بمقتضى بند (٨٥)

ثم ان تحويل السطح المستوى الى سطح اصغر منه يمكن ان يصنع بواسطة احدى هاتين الطريقتين لانه اذا كانت كل النقط الاصلية من هذا السطح المستوى مجموعة بواسطة مثلثات وعملنا مثلثات اخرى مشابهة لها وموضوعة على وضع واحد واضلاعها تكون بالنسبة لاضلاع الاولى على النسبة المفروضة فاننا نجد صورة السطح المستوى المطلوب

وسيأتى الكلام على هذا الفرض وبدل ان نتبع الطريقة الصعبة التى فرغنا من بيانها فى استخراج متناسب رابع لثلاثة خطوط مفروضة يكون الاسهل لنا ان نستعمل المقاييس التى اطوالها تكون على ذات النسبة التى بين الخطوط المتناظرة من شكل ومن صورته المنسوخة منه فلهذا وجب علينا ان نتكلم على عمل المقاييس فنقول

(١٠١) كيف يعمل مقياس متساوى الاجزاء كما فى (شكل ٨٤)

المراد بالمقياس الخط المستقيم المستعمل لقياس جميع خطوط سطح مستو او خرطة فاذا لم يكن معك تفاصيل دقيقة تريد رسمها فاستعمل فى اغلب الاوقات المقاييس المعمولة كما تراه فى اسفل شكل ٨٤ واستعمل فى عكس ذلك المقاييس الاعشارية ولنذكر طريقة عملها فنقول

لنفرض ان المراد اخذ عشر المسافة الذى هو ام ولنفرضه ميترا مثلا فترفع على المستقيم ا ب من الشكل المذكور عمودا ا س ونضع على هذا العمود مثل المسافة ام عشر مرات أو عشر مسافات متساوية ثم نمد من جميع نقط القسمة خطوطا موازية للخط ا ب ثم نمد موازيا بل س م

و غ ق و ض ط الخ فتصير متساوية الابعاد لان المسافات ا م و م ق الخ و س غ و غ ض الخ متساوية بالعمل وبهذه الطريقة جزؤ الموازى الاول (ل اَ) المشتبك فى المثلث تَ ـ ى يصير عشر ام أو عشر متر وجزؤ الموازى الثانى المشتبك كذلك يصير ٢/١٠ ام وهلم جرا فاذا اردنا الآن اخذ طول قدره ١٦ مترا و ٤/١٠ مثلا نخذ بالبيكار من (٤ ٤َ) جزء الموازى الداخل بين ـ ن والمائل ن ظ واذا اردت ايضا اخذ طول قدره ٥٥ و٢٨ مترا نخذ جزء الموازى الداخل بين و ش و غ ق والمتوسط بين الاثنين الآخرين وهما (٥ ٥َ) و (٦ ٦َ) وفى الاستعمال ينوب عن الحرفين ف ح العددان ١٠ و ٢٠ وعن الحروف ع و ح و ت و ص و ر الخ الاعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ الخ

(١٠٢) كيف يستخرج وسط متناسب بين خطين مفروضين

(الحل الاول لهذه الدعوى)

هو ان تضع بالتعاقب على المستقيم غ ض غير المتناهى الخطين ا و ـ المفروضين كما فى (شكل ٨٥) وتجعل غ ض الذى هو مجموع هذين الخطين بمنزلة قطر ترسم عليه نصف محيط ومن النقطة ظ التى هى نهاية الجزء غ ظ = ا تقيم على غ ض عمودا ظ و فيكون هو الوسط المتناسب المطلوب وبيان ذلك انه بموجب خاصية الدائرة المذكورة فى بند (٥٤) يكون غ ظ : ظ و :: ظ و : ظ ض أو ا : ظ و :: ظ و : ـ

(الحل الثانى)

هو ان ترسم على الخط الاكبر وهو ـ أو غ ضَ نصف محيط وتضع الخط ا على الخط ـ يعنى تجعل غ ط = ا ومن النقطة ظ التى هى نهاية المستقيم ا اقم ظ وَ عمودا على غ ضَ ثم ارسم وترا غ وَ فيصير هو الوسط المتناسب المطلوب انظر بند (٥٤)

ولاجل استخراج الوسط المتناسب بين عددين اضرب احدهما فى الآخر فجذر حاصل الضرب هو الوسط المتناسب كما هو مقرر فى علم الجبر

(١٠٣) كيف يقسم خط الى متناسبة ذات وسط وطرفين

ليكن المستقيم اب من (شكل ٨٦) هو المطلوب قسمته الى متناسبة ذات وسط وطرفين فاقم س ا عمودا على اب وخذ س ا = ½ اب واجعل النقطة س مركزا وببعد نصف القطر س ا ارسم محيطا وصل س ب وخذ ب ح = د ب فالنقطة ح تقسم اب كما يقتضيه منطوق المسئلة وذلك لانه بسبب ان اه مماس للمحيط يكون بمقتضى بند (٥٦)

شب : اب :: اب : بد

ثم شب ــ اب : اب :: اب ــ بد : بد

لكن شب ــ اب = شب ــ شد = بد

و اب ــ بد = اب ــ بح = اح

فاذن المتناسبة السابقة تصير هكذا بد : اب :: اح : بد

فاذا وضعنا الوسطين موضع الطرفين ووضعنا بح موضع بد يكون

اب : بح :: بح : اح

ومن حيث ان اب اكبر من بح يكون ضرورة بح > من اح فاذن الجزء بح الذى هو اكبر جزء من الخط اب هو الوسط المتناسب بين اب و اح

ويتضح بهذا العمل ان الخط القاطع وهو بش منقسم فى النقطة د الى متناسبة ذات وسط وطرفين

(١٠٤) كيف يستخرج ضلع من مربع مكافىء لمستطيل مفروض

ليكن ب و ش قاعدة المستطيل المفروض وارتفاعه وخ ضلع المربع المطلوب فمن الواضح انه بمقتضى نص المسئلة يلزم ان يكون

ب × ش = خ٢ او ب : خ :: خ : ش

يعنى ان ضلع المربع هو الوسط المتناسب بين قاعدة المستطيل وارتفاعه فاذن

تحل

تحل هذه الدعوى العملية بطريقة بند (١٠٢)

(١٠٥) كيف يحول مضلع مستقيم الخطوط ايا كان الى مضلع آخر مكافى له وناقصا عنه ضلعا

لنفرض ان المضلع المفروض ذو اربعة اضلاع ا ب ر ى كما فى (شكل ٧٢) وان الغرض تحصيل مثلث مكافى له فلاجل هذا نرسم ا ر الذى هو قطر الشكل ونرسم من النقطة ى مستقيما ى ے موازيا لهذا القطر ومنتهيا الى الضلع ا ب الممدود بالكفاية ثم نجمع النقطتين ے و ر فيحصل مثلث ب ر ے يكون مكافئا لذى الاضلاع الاربعة ا ب ر ى ولاجل البرهنة يلزم ان تعتبر ان المثلثين ا ى ر و ا ے ر متساويان فى السطح بسبب ان لهما قاعدة واحدة هى ا ر وارتفاعا واحدا لان رأسيهما موضوعان على خط واحد مواز للقاعدة فحينئذ اذا اضفنا الجزء المشترك ا ب ر من جهة المثلث ا ى ر ومن اخرى المثلث ا ے ر كان هذان المجموعان متساويين فحينئذ المثلث ے ب ر يكون مكافئا لذى الاضلاع الاربعة ا ب ر ى

ومن هنا يفهم امكان تحويل مضلع ايا كان الى مثلث مكافى له لانه اذا كان الغرض مثلا عمل ذلك فى مخمس فانه يحول بالطريقة السابقة الى ذى اربعة اضلاع مكافى له ثم يستخرج مثلث مكافى لذى الاربعة اضلاع المذكور

(١٠٦) كيف يستخرج مربع مكافى لمضلع مفروض

يلزم فى حل هذه الدعوى العملية بالرسم ان يحول المضلع المفروض الى مثلث مكافى ثم يستخرج بطريقة قضية بند (١٠٢) وسط متناسب بين قاعدة هذا المثلث ونصف ارتفاعه وهذا الوسط المتناسب يكون ضلع المربع المطلوب بمقتضى بند (٧٢) وبند (١٠٤)

ومن هنا ينتج ان جميع الاشكال المستقيمة الخطوط تكون قابلة للتربيع

تنبيه لاجل عمل مربع مكافى لدائرة يلزم ان يكون ضلع هذا المربع وسطا متناسبا بين محيط الدائرة المفروضة وربع قطرها لكن حيث ان النسبة العددية

بين هذين الخطين غير مشتركة القياس ينتج ان تربيع الدائرة غير ممكن لكن سطح المربع المتحصل بهذه الطريقة يكون اقل من سطح الدائرة بقدر قرب النسبة المذكورة من هذا السطح

(١٠٧) كيف يرسم مربع فى دائرة

ارسم قطرين اجـ و بـ د كما فى (شكل ٨٧) واجعل احدهما عمودا على الآخر بمقتضى بند (٨٦) فالخطوط الاربعة المستقيمة التى تجمع اطرافهما تصير اضلاع المربع ابجد المرسوم فى الدائرة وهذا واضح ومن الواضح ايضا ما يلزم عمله لاجل رسم مربع على هذه الدائرة ولا تعسر البرهنة على ان المربع المرسوم على الدائرة هو ضعف المربع المرسوم فيها

فاذا قسمنا كل ربع من المحيط الى قسمين متساويين ووصلنا نقط القسمة يحدث المثمن المنتظم المرسوم فى الدائرة ومن هذا يمكن الانتقال الى مضلع آخر منتظم ذى عدة اضلاع ضعف عدة اضلاع الاول انظر بند (٩١) فحينئذ جميع المضلعات المنتظمة القابلة للرسم فى الدائرة وعليها بواسطة المربع هى مضلعات لها من الاضلاع ٤ و ٨ و ١٦ و ٣٢ الخ

(١٠٨) كيف ترسم مسدسا منتظما فى دائرة

ضع نصف قطر الدائرة المفروضة ست مرات وضعا متواليا على محيط الدائرة كما فى (شكل ٤٥) لان ضلع المسدس المنتظم يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة عليه انظر بند (٦١)

فاذا وصلنا نقط القسمة الستة مثنى يحصل المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم فى الدائرة ومن المعلوم ان هذا المثلث هو ربع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم على الدائرة

وكل المضلعات القابلة للرسم فى الدائرة وعليها بواسطة المسدس المنتظم هى مضلعات لها من الاضلاع ٣ و ٦ و ١٢ و ٢٤ الخ

(١٠٩) كيف يرسم معشر منتظم فى دائرة

يقسم كما فى (شكل ٤٧) نصف قطر الدائرة المفروضة الى متناسبة ذات وسط

وطرفين

وطرفين فالجزء الاكبر من هذا النصف القطر يكون ضلع المعشر المنتظم المرسوم فى الدائرة انظر بند (٦٢) فاذا وصلنا نقط القسمة العشرة مثنى يحصل المخمس المنتظم فينتج من هذا وعما سبق ان كل المضلعات المنتظمة القابلة للرسم فى الدائرة او عليها بواسطة المعشر هى مضلعات لها من الاضلاع ٥ و ١٠ و ٢٠ و ٤٠ الخ

(١١٠) كيف يرسم ذو الخمسة عشر ضلعا فى دائرة

القوس الموتر بضلع من اضلاع ذى الخمسة عشر يساوى قوس المسدس الا قوس المعشر وذلك ان قوس المسدس يساوى $\frac{٤}{٦}$ أو $\frac{٢}{٣}$ من زاوية قائمة وقوس المعشر يساوى $\frac{٤}{١٠}$ أو $\frac{٢}{٥}$ فحينئذ فرق هذين القوسين يساوى $\frac{٢}{٣} - \frac{٢}{٥} = \frac{٤}{١٥}$ من الزاوية القائمة وهذا بالتحرير هو قوس ضلع ذى الخمسة عشر ضلعا فبواسطة هذا المضلع يمكن ان يرسم فى الدائرة او عليها بجميع المضلعات التى لها من الاضلاع ١٥ و ٣٠ و ٦٠ الخ

(تنبيه) الدعاوى العملية المتقدمة تجرى فى رسم الاستحكامات المنتظمة

(حل الدعاوى العملية بالحساب)

(١١١) كيف يقام عمود على مستقيم على الارض بواسطة حبل

قد تقدم حل هذه الدعوى العملية فى بند (٩٢) لكن حلها هنا مبنى على خاصية المثلث القائم الزاوية ويمكن ان يستعمل فيما اذا لم يوجد فضاء سوى المسافة الداخلة بين ضلعى الزاوية القائمة

فلنفرض ان الخط المستقيم هو سا كما فى (شكل ٨٨) وان الغرض أن يقام عليه من النقطة س عمود سد فاقسم حبلا الى ثلاثة اقسام متناسبة مثل تناسب ٣ و ٤ و ٥ واربط طرفيه فى وتد ظ وبعد عمل سظ = ٣ فوت هذا الحبل خلف وتد س وشده بحيث ان جزئيه سض و ضظ يحدثان الزاوية ض ويكون احدهما مساويا ٤ والآخر مساويا ٥ ثم اغرس اوتادا فى استقامة الوتدين س

و ضـ فالمستقيم سـ ضـ ء يكون هو العمود المطلوب وذلك لان المثلث سـ ط ضـ هو قائم الزاوية فى سـ لان مربع اكبر الاضلاع يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين انظر بند (٥٣) و (٧٧)

(١١٢) كيف تؤخذ مساحة عرض نهر على فرض انه لم يكن هنالك آلة اخرى غير المتر

أقم كما فى (شكل ٨٩) على الخط ا سـ الذى هو عمود على مجرى الماء عمودا سـ ـ بالطريقة السابقة وخذ سـ ء كيف ما اتفق وخذ ء ـ مناسبا سـ ء وضع الشواخص فى استقامة ا ء واقم من النقطة ـ عمودا ـ ف وابحث عن نقطة التلاقى ف ثم قس ـ ـ و سـ ء و ء ـ و ـ ف فبهذا العمل يحدث مثلثان ا ء سـ و ف ء ـ متشابهان فاذن

ء ـ : ـ ف :: سـ ء : سـ ا

وبتحديد سـ ا بهذه الكيفية يحصل عرض النهر وهو ا ـ = سـ ا ـ سـ ـ فيفرض ان النقطة ا شئ محسوس على الشط المقابل للشط الذى نحن به مثل حجر ضخم او شجرة

مثال ذلك ان نفرض ان ـ سـ = ٤م و سـ ء = ٣٠م و ء ـ = ٢٠م و ـ ف = ٤٥م فيكون

٢٠ : ٤٥ :: ٣٠ : سـ ا = $\frac{٢٧٠}{٤}$ = ٦٧،٥م

فاذن ا ـ = ٦٧،٥م ـ ٤ = ٦٣،٥م

(١١٣) كيف يعرف طول ما او ارتفاع شئ لا يمكن الوصول اليه على فرض انه ليس هنالك آلة الا المتر كما تقدم

لنفرض ان صـ ط كما فى (شكل ٩٠) الطول او الارتفاع المطلوب معرفته وان المسافة سـ ط لا يمكن الوصول اليها الا فى النقطة ـ وان سطح الارض ط ء افقى او ذو انحدار واحد

فضع

فضع شاخصين مستقيمين ولا باس ان يكونا متساويين فى الطول واركزهما قائمين احدهما فى ب والآخر فى ا وليكن مثلا بف و اى ارتفاعى هذين الشاخصين ثم ابحث واضعا رأسك بقرب الارض عن النقطتين س و ء اللتين فيهما الشعاعان صف و صى المارات بنهاية كل من الشاخصين وبنهاية الشئ المطلوب معرفة طوله او ارتفاعه يتلاقيان مع سطح الارض الذى هو بء ثم قس اقسام هذا الخط وهى ءا و اس و سب وقس ايضا طول كل من الشاخصين واستعمل فى حساب الارتفاع ضط الطريقة التى نذكرها فنقول •

اذا فرضنا لاجل الاختصار ان ءا = ا و اس = ب و سب = س و اى = بف = ش و بط = خ و طص = ض فالمثلثان سبف و سطص المتشابهان يفيدان مناسبة نظمها هكذا

س : ش :: س + خ : ض

وكذلك المثلثان ءاى و ءطص المتشابهان يفيدان متناسبة نظمها هكذا

ا : ش :: ا + ب + س + خ : ض

وحيث كانت التوالى متحدة فى المتناسبتين صح ان تكون النتيجة هكذا

ا : س :: ا + ب + س + خ : س + خ

فينتج منه

$$خ = \frac{س(ب+س)}{ا-س} \quad •$$

فاذا ابدلنا هذا المقدار فى المناسبة الاولى تحصل معنا

$$ض = \frac{ش(ا+ب)}{ا-س}$$

يعنى ان نسبة فاضل القطعتين ءا و سب الى بعد المسافة سء كنسبة ارتفاع الشاخصين المشترك الى الارتفاع المطلوب

(١١٤) كيف يستخرج مقدار الزاوية المركزية ومقدار الزاوية المحيطية اذا علم عدد اضلاع المضلع المنتظم

فحيث انه يوجد من الزوايا المركزية بقدر عدة اضلاع المضلع وان جميع هذه الزوايا متساوية تكون احداها اذن مساوية لاربع زوايا قائمة مقسومة على عدة اضلاع المضلع فاذا اشرنا لهذه العدة بالحرف ع تكون

الزاوية المركزية $= \frac{\text{٤ زوايا قائمة}}{\text{ع}}$ ولما كان مجموع زوايا المضلع الداخلة

ايا كان يساوى قوائم لعدد اضلاعه الا اثنين مضروبا باقيه فى قائمتين كما فى بند (٤٤) وكان فى المضلع المنتظم جميع الزوايا متساوية ينتج ان كل واحدة منها مساوية لمجموعها مقسوما على عدتها فاذن تكون الزاوية المحيطية

او زاوية المضلع $= \frac{\text{٢ قائمتين (ع ــ ٢)}}{\text{ع}}$ فينتج من هذا ان الزاوية المركزية

وزاوية المضلع يساويان معا زاويتين قائمتين فحينئذ يمكن حل دعوى عملية هى ان يقال اذا كانت قلعة محصنة تحصينا منتظما وعلم منها الزاوية المصنوعة من بردتين متتاليتين اى سارتين فكيف يستخرج عدد البستيونات

وكانت عادة المهندسين قبل استعمال المذهب المترى الجديد فى فرنسا انهم يستعملون قسمة المحيط الى ٣٦٠ درجة والدرجة الى ٦٠ دقيقة والدقيقة الى ٦٠ ثانية وهلم جرا ولكن بسبب فائدة القسمة الاعشارية اختاروا تقسيم المحيط الى ٤٠٠ درجة وكل درجة الى ١٠٠ دقيقه وكل دقيقه الى ١٠٠ ثانية وهكذا فعلى هذا المذهب يكون ربع المحيط ١٠٠ درجة فمن هنا ينتج ان الزاوية المركزية فى المضلعات المنتظمة التى لها من الاضلاع ٣ و ٤ و ٥ و ٦ الخ يكون لها من الدرجات على حسب الترتيب المذكور فى الاضلاع ١٢٠ و ٩٠ و ٧٢ و ٦٠ الخ على تقسيم المذهب القديم ويكون لها ١٣٣ درجة و ٣٣ دقيقة و ٣٣ ثانية و $\frac{١}{٣}$ و ١٠٠ درجة و ٨٠ درجة و ٦٦ درجة و ٦٦ دقيقه و ٦٦ ثانية و $\frac{٢}{٣}$ الخ على التقسيم الجديد

(١١٥) كيف تؤخذ مساحة الزاوية بالمنقلة

المنقلة هى نصف دائرة من نحاس او قرن منقسمة الى ١٨٠ درجة على القديم والى ٢٠٠ درجة على الجديد وفى بعض الاحيان تنقسم الى انصاف درجات المذهب الجديد اذا كانت عظيمة القطر وهى كثيرة الاستعمال فى ان ينقل بها على الورق الزوايا المسوحة على الارض ونستعمل ايضا فى مساحة زاوية على الورق وطريقة العمل فى هذه الصورة الاخيرة ان تضع مركز هذه الآلة فى رأس الزاوية التى يراد مساحتها بجعل قطرها منطبقا على احد ضلعى هذه الزاوية فحينئذ يكون عدد الدرجات الجديدة الداخلة فى القوس الذى بين الضلعين هو مساحة هذه الزاوية

(١١٦) كيف يرسم مضلع منتظم ذو عدة اضلاع مفروضة فى داخل دائرة بالمنقلة

فطريقة الرسم الصحيحة فى العمل المستعملة فى سائر المضلعات المنتظمة من غير تخصيص ان تضع مركز منقلة عظيمة فى مركز الدائرة المفروضة وتأخذ على محيط هذه المنقلة اقواسا متوالية عدد درجاتها بالمقياس الجديد مثل مقدار الزاوية التى فى مركز المضلع المطلوب رسمه فحينئذ اذا رسمنا انصاف اقطار بنهايات الاقواس فان محيط الدائرة يكون منقسما كما يراد ولاشك انه يمكن بهذه الطريقة ان يرسم على الدائرة مضلع منتظم ايا كان

(١١٧) كيف يستخرج سطح مثلث اضلاعه الثلاثة معلومة

ليكن الضلع بح = ا والضلع اح = ب والضلع اب = ح كما فى (شكل ٦١) ولنشر بالحرف خ الى القطعة اد فيقتضى دعوى بند (٧٨) النظرية تحدث معادلة نظمها هكذا

$$\overline{\text{بح}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} + \overline{\text{اب}}^{2} - ٢\ \text{اب} \times \text{اد}$$

وباستعمال الاشارة المذكورة يكون نظمها

$$\text{ا}^{2} = \text{ب}^{2} + \text{ح}^{2} - ٢\ \text{ح}\,\text{خ}$$

ومنه ينتج ان $\text{خ} = \frac{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2} - \text{ا}^{2}}{٢\,\text{ح}}$

و $\text{حد} = \text{ضه} = \sqrt{\text{اح}^2 - \text{اد}^2} = \sqrt{\text{ب}^2 - \left(\frac{\text{ب}^2+\text{ح}^2-\text{ا}^2}{2\text{ح}}\right)^2}$

فبناء على ذلك يكون

$$\text{سطح ابح} = \frac{\text{ح ضه}}{2} = \frac{\text{ح}}{2}\sqrt{\text{ب}^2 - \left(\frac{\text{ب}^2+\text{ح}^2-\text{ا}^2}{2\text{ح}}\right)^2}$$

فاذا ادخلنا $\frac{\text{ح}}{2}$ فى الجذر يعنى ضربنا جميع الداخل تحت العلامة فى $\frac{\text{ح}^2}{4}$ ثم حولناه الى مقام واحد يحصل

$$\text{سطح ابح} = \sqrt{\frac{4\text{ب}^2\text{ح}^2-(\text{ب}^2+\text{ح}^2-\text{ا}^2)^2}{16}}$$

فبسط الكسر الذى تحت الجذر يدل على فاضل المربعين فاذن يحصل كما هو مقرر فى علم الجبر

$$\text{سطح ابح} = \sqrt{\frac{(2\text{بح}+\text{ب}^2+\text{ح}^2-\text{ا}^2)}{4}\cdot\frac{(2\text{بح}-\text{ب}^2-\text{ح}^2+\text{ا}^2)}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{[(\text{ب}+\text{ح})^2-\text{ا}^2]\,[\text{ا}^2-(\text{ب}-\text{ح})^2]}{4\times4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{ب}+\text{ح}+\text{ا})}{2}\cdot\frac{(\text{ب}+\text{ح}-\text{ا})}{2}\cdot\frac{(\text{ا}+\text{ب}-\text{ح})}{2}\cdot\frac{(\text{ا}-\text{ب}+\text{ح})}{2}}$$

فاذا اختصرنا بجعل $\text{ا}+\text{ب}+\text{ح} = \text{ط}$ يحصل $\frac{\text{ب}+\text{ح}-\text{ا}}{2} = \frac{\text{ط}}{2} - \text{ا}$ و $\frac{\text{ا}-\text{ب}+\text{ح}}{2} = \frac{\text{ط}}{2} - \text{ب}$ و $\frac{\text{ا}+\text{ب}-\text{ح}}{2} = \frac{\text{ط}}{2} - \text{ح}$ ولهذا يكون

$$\text{سطح ابح} = \sqrt{\frac{\text{ط}}{2}\left(\frac{\text{ط}}{2}-\text{ا}\right)\left(\frac{\text{ط}}{2}-\text{ب}\right)\left(\frac{\text{ط}}{2}-\text{ح}\right)}$$

ومنه ينتج ان سطح المثلث الذى اضلاعه الثلاثة معلومة يساوى جذر مربع الحاصل من الاربع مكررات التى اولها نصف محيط المثلث والثلاثة الاخرى هى الفواضل الثلاثة التى تحصل بطرح كل واحد من الاضلاع على التوالى من نصف المحيط المذكور

وهذه المعادلة نافعة جدا فى المساحة لاننا اذا حللنا مضلعا مستقيم الخطوط

الى

الى مثلثات وعلمنا جميع اضلاعها امكن حالا معرفة مقدار سطح هذا المضلع بواسطة هذه المعادلة

ولاجل العمل نفرض ا = ٢٥م و ب = ٢٠م و ج = ١٥م

فيكون

السطح ا ب ج = $\sqrt{٣٠(٣٠-٢٥)(٣٠-٢٠)(٣٠-١٥)}$

= ١٥٠ مترا مربعا لكن لما كان في هذه الحالة المخصوصة المثلث ا ب ج قائم الزاوية لكون مربع اكبر اضلاعه يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين كان الاسهل في تحديد سطحه ان يضرب احد ضلعي الزاوية القائمة في نصف الآخر كما في بند (٧٢) فاذن يحصل كما تقدم

سطح ا ب ج = $\frac{١٥ \times ٢٠}{٢}$ = ١٥٠ مترا مربعا

(دعاوى للحل)

(١١٨) قد استعملنا طريقة الجبر في حل المسئلة السابقة لانه في الغالب اقرب الطرق واوثقها في التوصل في الهندسة الى كشف الارتباطات الموجودة بين المقادير المفروضة والمقادير المطلوبة ولذلك هنا عدة مسائل اخرى ليتمرن الطالب على حلها بطريق التحليل السابق فنقول

١ اذا كان هنالك مستطيل سطحه ثمانون مترا مربعا وفاضل قاعدته عن ارتفاعه ١١ مترا فما تكون المقادير العددية لهذين الخطين

جوابه ١٦ مترا و ٥ امتار

٢ اذا كانت مساحة شبه المنحرف = ١٣١٥ مترا مربعا وقاعدتاه المتوازيتان ١٣ مترا و ٢١ مترا فما يكون ارتفاعه

جوابه ٧٧٫٣٥٢ مترا

٣ اذا كانت مساحة المثلث المتساوي الاضلاع ٣٨٩٫٧١ مترا مربعا فما يكون ضلعه

جوابه ٣٠ مترا

٤ اذا كانت مساحة المسدس المنتظم ١٦٦٢٫٢٧٢ مترا مربعا فما

يكون ضلعه

جوابه ٨ امتار

٥ اذا كان مجموع ثلاثة اضلاع المثلث القائم الزاوية ١٥٦ مترا ومساحته تساوى ١٠١٤ مترا مربعا فما مقدار كل ضلع من اضلاعه

جوابه ٣٩ مترا و ٥٢ و ٦٥

٦ اذا كان قطعتا وتر على نسبة ٣ : ٥ وكان جزءا الوتر الصانع لهاتين القطعتين ١٠ و ١٨ فما يكون مقدار هذا الوتر

جوابه ٢٧,٧١ مترا

٧ اذا كانت دائرة مساحتها ١٣٢,٧٣٢٦ مترا فما يكون نصف قطرها

جوابه ٦,٥ امتار

٨ ما مساحة دائرة علم ان وتريها المرسومين من نقطة من المحيط الى طرفى القطر ١٧ مترا و ٢٣

جوابه ٦٤٢,٤٥٦ مترا

٩ ما مساحة قطع دائرة قوسه ٤٣ درجة و ٢٢ دقيقة و ٤٨ ثانية على التقسيم القديم أو ٤٨ درجة و ٢٠ دقيقة على التقسيم الجديد ونصف قطره يساوى ٢٠ مترا

جوابه ١٥١,٤٢٥ مترا مربعا

١٠ اذا كانت ثلاثة اضلاع مثلث قدر احدها ٣٠ مترا والثانى ٢٤ والثالث ٢٠ واريد قسمة هذا المثلث الى جزئين متكافئين بخط موازٍ لاكبر الاضلاع فما مقدار هذا الخط

جوابه خط القسمة = ٢١,٢١

١١ اذا كانت ثلاثة اضلاع مثلث على نسبة ٣ : ٧ : ٨ ومساحته ٣٤٠ مترا مربعا فما تكون اضلاعه الثلاثة

جوابه ١٧,١٦ مترا و ٤٠,٤٠ و ٤٥,٧٦

١٣ ما نسبة مساحة ذى الاثنى عشر المنتظم المرسوم فى الدائرة الى مساحة المربع المرسوم عليها

جوابه ذو الاثنى عشر المرسوم فى الدائرة هو ثلاثة ارباع المربع المرسوم عليها

(المقالة الثانية وفيها عدة فصول)

(الفصل الاول)

فى خواص المستويات التى تتلاقى وخواص الخطوط المستقيمة المقطوعة بمستويات متوازية

(١١٩) الفصل المشترك لمستويين خط مستقيم وبيان ذلك ان الخط المستقيم المار بنقطتى الفصل المشترك من مستويين يكون فى كل من المستويين فاذن هذا المستقيم هو الفصل المشترك لهذين المستويين

ويمكن بنقطة واحدة او بخط مستقيم واحد مرور عدة غير متناهية من سطوح مستوية مختلفة

وكل وضع ثلاث نقط او وضع خطين مستقيمين متقاطعين او متوازيين يحدد وضع مستو

ويكون المستقيم عمودا على سطح مستو اذا كان عمودا على جميع المستقيمات المارة بموقعه فى ذلك المستوى ويلزم منه ان يكون المستوى عمودا على المستقيم وموقع العمود على مستو هو النقطة التى يشترك فيها مع المستوى

والمستقيم يكون موازيا للمستوى اذا لم يمكن تلاقيهما ويكون المستويان متوازيين اذا لم يمكن تلاقيهما ولو مدا الى غير نهاية

(١٢٠) المستقيم يكون عمودا على مستو اذا كان عمودا على مستقيمين مارين بموقعه ومرسومين فى ذلك المستوى

ليكن اط عمودا على المستقيمين ب ط و حـ ط المرسومين فى المستوى م ن كما فى (شكل ٩١) فيلزم البرهنة على ان كل مستقيم مثل ء ط مرسوم فى مستو واحد من النقطة ط يكون عمودا على اط بان يقال

من النقطة د المأخوذة كما يراد على دط بعد ب ح بحيث يكون ب د = ح د ثم تمد مستقيمات اب و اد و اح فالمثلث ب اح يفيد

$$\overline{اب}^2 + \overline{اح}^2 = ٢ \overline{اد}^2 + ٢ \overline{بد}^2$$ انظر بند (٨٠)

وكذلك المثلث ب ح ط يفيد

$$\overline{بط}^2 + \overline{حط}^2 = ٢ \overline{دط}^2 + ٢ \overline{بد}^2$$

فاذا طرحنا هذه المعادلة الاخيرة من الاولى واختصرنا بواسطة اخذ $\overline{اط}^2$ بدل $\overline{اب}^2 - \overline{بط}^2$ و $\overline{اط}^2$ بدل $\overline{اح}^2 - \overline{حط}^2$ اللذين افادهما المثلثان اب ط و اح ط يحصل

$$٢ \overline{اط}^2 = ٢ \overline{اد}^2 - ٢ \overline{دط}^2$$ فاذن $$\overline{اط}^2 + \overline{دط}^2 = \overline{اد}^2$$

فاذن يكون المثلث ا د ط قائم الزاوية فى ط وبهذا يثبت المطلوب

(١٢١) جميع المستقيمات المأخوذة من نقطة الى مستو اقصرها هو العمود واطولها هو ابعدها عن موقع ذلك العمود

فليكن ط ا من (شكل ٩٢) عمودا على المستوى م ن و اب > اح بحيث ان النقطتين ب و ح موضوعتان فى المستوى م ن يقال اذا رسمنا من النقطة ا مستقيما اد مساويا اح وموضوعا فى المستوى اب ط فالمثلثان اط د و اط ح يكونان متساويين وبمقتضى بند (٢٤) يقال حيث ان المائل اب اكبر من اد يكون ب ط اكبر من ط د لكن ط د يساوى ط ح بالعمل فاذن ط ب > ط ح فاذن يثبت المطلوب

وينتج من هذا ان النقطة ط التى هو موقع العمود اط هى مركز الدائرة التى ترسم على المستوى م ن بجعل ا مركزا وبعد نصف قطرا كبر من اط وهذه الخاصية تفيد طريقة تنزيل عمود على مستو من نقطة ماخوذة خارج هذا المستوى

والبعد

والبعد الحقيقى من النقطة ا الى المستوى م ن هو العمود اط

(١٢٢) اذا رسمنا من موقع عمود على مستو عمودا على خط مرسوم فى هذا المستوى ومددنا خطا مستقيما من موقع هذا العمود الثانى الى اى نقطة من العمود الاول فان هذا المستقيم يكون عمودا على هذا الخط المرسوم فى هذا المستوى

فليكن كما فى (شكل ٩٣) اط عمودا على المستوى م ن و طى عمودا على الخط ب س المرسوم فى هذا المستوى فيكون اى عمودا على الخط ب س

نخذ ب ى مساويا س ى وابجع ب ط و ط س فيكون المثلثان ب ط ى و س ط ى متساويين فاذن ب ط = ط س وكذلك المثلثان ا ط ب و ا ط س القائما الزاوية اى انهما متساويان فاذن ا ب = ا س فاذن يكون كما فى بند (٢٤) المستقيم اى عمودا على ب س

(١٢٣) المستقيم العمود على مستو كل خط موازله يكون عمودا على ذلك المستوى

ليكن كما فى (شكل ٩٤) الخط اط عمودا على المستوى م ن و س ى موازيا اط فعلى سمت هذين المتوازيين برسم مستو يقطع م ن فى سمت ى ط وفى هذا المستوى الاخير بمد ى ب عمودا على ط ى ويوصل اى فبمقتضى الدعوى النظرية السابقة يكون ى ب عمودا على اى وبالعمل يكون هذا المستقيم عمودا ايضا على ط ى فاذن يكون ى ب عمودا على المستوى ا ط ى س وبناء على ذلك يكون عمودا على الخط س ى لكن المستقيم س ى الموازى اط عمود على ط ى فاذن هذا المستقيم يكون عمودا على المستوى م ن

وينتج من ذلك اولا انه اذا كان خطان او عدة خطوط موضوعة فى مستويات مختلفة وكانت اعمدة على مستو فان هذه الخطوط تكون متوازية

وثانيا ان كل مستقيمين موازيين لثالث يكونان متوازيين

(١٢٤) كل مستقيم موازلآخر مرسوم فى مستو فهو موازلذلك المستوى

وذلك ان المستقيم ا ب الموازى للخط ﺳ ﺩ المرسوم فى المستوى م ن كما فى (شكل ٩٥) لا يمكن ان يتلاقى مع ذلك المستوى من غير ان يقطع المستقيم ﺳ ﺩ وقطعه له غير ممكن فاذن ا ب يكون موازيا للمستوى م ن

(١٢٥) كل مستويين عمودين على مستقيم واحد فهما متوازيان وبالعكس اى ان كل مستقيم عمود على احد مستويين متوازيين فهو ايضا عمود على المستوى الآخر

لنفرض كما فى (شكل ٩٦) ان كلا من المستويين م ن و ط ى عمود على المستقيم ا ب وانه يمكن تلاقيهما فى سمت ﺳ ﺩ فنعين النقطة و على هذا الفصل المشترك ونصل الخطين ا و و و ب فالاول وهو ا و يصير بتمامه فى المستوى م ن لان ا هى موقع العمود ا ب فاذن تكون الزاوية ا قائمة وبمثل هذا يكون ب و موضوعا فى المستوى ط ى فاذن الزاوية ب قائمة ويلزم من ذلك ان ا و و ب و يكونان عمودين نازلين من نقطة واحدة على مستقيم واحد وهذا غير ممكن فاذ المستويان م ن و ط ى لا يمكن تلاقيهما فاذن هما متوازيان

(١٢٦) الفصلان المشتركان لمستويين متوازيين مقطوعين بمستو ثالث هما متوازيان

لنفرض كما فى (شكل ٩٧) ان المستقيمين ا ب و ﺳ ﺩ هما الفصلان المشتركان للمستوى ا ﺩ ﺳ ب مع المستويين م ن و ط ى فلو لم يكن هذان المستقيمان متوازيين لكانا بالبداهة متلاقيين لكونهما فى مستو واحد لكن المستويان م ن و ط ى اللذان فيهما هذان الخطان يتلاقيان ايضا وهذا خلاف الغرض فاذن المستقيمان ا ب و ﺳ ﺩ متوازيان

(١٢٧) المتوازيات الواقعة بين مستويين متوازيين تكون متساوية

كما

كما فی (شكل ٩٨)
فاذا توهمنا مستويا اب ى س مارا بالمستقيمين ا ـ و س ى المتوازيين فان الفصلين ا ـ و ـ ى المشتركين من هذا المستوى مع المستويين م ن و ط ى المتوازيين يكونان متوازيين فحينئذ شكل ا ـ ى س يصير متوازى الاضلاع فاذن ا ـ = س ى

(١٢٨) كل زاويتين ليستا موضوعتين فی مستو واحد واضلاعهما متوازية ومتجهة الى جهة واحدة تكونان متساويتين ومستوياهما متوازيين .

فليكن الضلعان ا ـ و س ـ من الزاوية س متوازيين على التناظر للضلعين اَ ـَ و سَ ـَ من الزاوية سَ كما فی (شكل ٩٩)

ولنأخذ ا ـ = اَ ـَ و س ـ = سَ ـَ فبمقتضى بند (٣١) يكون شكل ا ـ ـَ اَ متوازى الاضلاع فينتج ان اَا يساوى ويوازى سَ سَ وكذلك يقال فی ـ ـَ و س سَ فاذن يكون اَا مساويا وموازيا ـ ـَ بمقتضى نتيجة (نمرة ١٢٣) فحينئذ المثلثان ا س ـ و اَ سَ ـَ من حيث ان لهما ثلاثة اضلاع كل منها مساو لنظيره تكون س = سَ ومن المعلوم ان هذين المثلثين او المستويين المشتملين على هذين المثلثين يكونان متوازيين .

(١٢٩) المستقيمان الواقعان بين مستويين متوازيين ينقسمان بمستو ثالث مواز للمستويين المذكورين الى اجزاء متناسبة

فليكن ا ـ و س ى المستقيمين فاذا رسمنا مستويا مارا من ا ـ س فان فصليه المشتركين مع المستويين م ن و ز ص المتوازيين يكونان ا س و غ ض كما فی (شكل ١٠٠) وكذلك اذا رسمنا مستويا مارا من ـ س ى فانه يقطع ط ى و ز ص على سمت ـ ى و ض ظ لكن المثلثة

اسر يفيد اغ : غب :: مرضه : ضهب
والمثلث ببرى يفيد
مرضه : ضهب :: سط : ظى
فبسبب النسبة المشتركة التى هى مرضه : ضهب يكون
اغ : غب :: سط : ظى وبهذا يثبت المطلوب

(الفصل الثانى)

(فى الزوايا الكثيرة السطوح ويقال لها المجسمة)

(١٣٠) الزاوية ذات السطحين هى ميل مستويين

(١٣١) الزاوية ذات السطحين تقاس بالزاوية الحادثة من خطين مستقيمين مرسومين فى كل من سطحيها وعمودين على فصلهما المشترك ومجموعين فى نقطة واحدة من هذا الخط

فحينئذ الخط وش الواقع فى المستوى اسر عمودا على اب والخط وك الواقع فى المستوى اى عمودا ايضا على اب تكون الزاوية شوك الحادثة بينهما قياس ميل هذين المستويين كما فى (شكل ١٠١)

(١٣٢) كل مستويين يتقاطعان فانه يكون لهما خواص الخطين المتقاطعين انظر بند (١٤)

كل مستويين متوازيين قطعا بمستو ثالث يثبت لهما عين الخواص التى تكون فى قطع المستقيمين المتوازيين بمستقيم ثالث انظر بند (٢٩)

(١٣٣) المستقيم العمود على مستو كل مستو يمر به يكون عمودا على المستوى المذكور

ليرسم كما يراد مستو اب يمر بالمستقيم اط الذى هو عمود على المستوى مه ويقام من النقطة ط التى هى موقع هذا العمود عمود طى فى المستوى مه على الفصل المشترك للمستويين وهو طب كما فى (شكل ١٠٢) فهذا العمود وهو طى يكون عمودا ايضا على اط انظر بند (١٢٠) لكن الزاوية اطى تكون قياس ميل المستويين مه

و ط ب انظر بند (١٣١) فحيث ان هذه الزاوية قائمة يكون كل من المستويين عمودا على الآخر

وينتج من هذا ان المستويين العمودين على مستو ثالث يكون الفصل المشترك لهما عمودا على الثالث

(١٣٤) الزاوية الكثيرة السطوح ويقال لها المجسمة هى المسافة غير المحدودة الواقعة بين عدة مستويات مجتمعة فى نقطة واحدة واقل الزوايا المجسمة هى المصنوعة من ثلاث مستويات فاذن يلاحظ فى كل زاوية مجسمة ثلاثية ستة اشياء هى ثلاث زوايا مستوية وثلاث زوايا ذوات سطحين

(١٣٥) مجموع كل اثنتين من الزوايا المستوية التى يتركب منها زاوية مجسمة ثلاثية هو دائما اكبر من الثالثة

لتكن الزاوية ص من (شكل ١٠٣) هى المجسمة الثلاثية المركبة من الزوايا اصـ ب و اصـ س و سصـ ب المستوية فاذا كانت الزوايا المستوية متساوية فالدعوى ظاهرة واذا لم تكن كذلك فلترسم فى الزاوية اصـ ب الاولى مستقيما صـ ى بحيث ان الزاوية ىصـ ب = سصـ ب ونأخذ صـ ى = صـ س ونرسم كما يراد من النقطتين س و ى مستويا اس ب فالمثلثان ىصـ ب و سصـ ب يكونان متساويين لان فى كل منهما زاوية وضلعين كل منهما مساو لنظيره من الآخر فاذن ى ب = س ب لكن اس + س ب > اى + ى ب فاذا طرحنا من كل من الطرفين س ب = ى ب ينتج ان اس > اى فحينئذ يكون فى كل من المثلثين اصـ ى و اصـ س زاوية مباينة للاخرى داخلة بين ضلعين مساويين لنظيريهما من الاخر فبمقتضى بند (٢١) يكون اصـ ى < اصـ س فاذا اضفنا لاحد الطرفين زاوية ىصـ ب والطرف الآخر مساويتها وهى سصـ ب تحصل

اصـ ى + ىصـ ب او اصـ ب < اصـ س + سصـ ب

وبهذا يثبت المطلوب

(١٣٦) مجموع الزوايا المستوية التى يتركب منها زاوية مجسمة محدبة اوذات اضلاع بارزة هو دائما اصغر من اربع زوايا قائمة

فاقطع الزاوية ص المجسمة بمستو ما مثل ا ب ى ء كما فى (شكل ١٠٤) وارسم من النقطة و المفروضة فى هذا المستوى مستقيمات او و ب و الخ فمجموع زوايا المثلثات اص ب و ب ص س الخ المشتركة الرأس فى النقطة ص يكافى مجموع زوايا مثلثات عدتها كعدتها وهى ا و ب و ب و س الخ المصنوعة حول الرأس و وفى النقطة ا مجموع الزاويتين ص ا ب و ص ا ء اكبر من الزاوية ب ا ء الثالثة وكذلك فى النقطة ب يكون ص ب ا + ص ب س > ا ب س وهكذا فبالضرورة يكون مجموع الزوايا التى فى قاعدة المثلثات ص ا ب و ص ا ء الخ اكبر من مجموع الزوايا التى فى قاعدة المثلثات التى رؤسها فى و فاذن يكون مجموع الزوايا التى حول النقطة ص اصغر من مجموع الزوايا التى حول و التى تساوى اربع زوايا قائمة

(١٣٧) الزاويتان المجسمتان المتكونتان من ثلاث زوايا مستوية ومتساوية على التناظر ومرتبة على وضع واحد تكونان متساويتين ويمكن انطباق احداهما على الاخرى

فلتكن صَ و صَ من (شكل ١٠٥) هما الزاويتان المجسمتان فمن النقطة ا المأخوذة كما يراد على الضلع ص ا نرسم ا ب و اج عمودين على ص ب و ص س ثم تنزل من النقطة ا ايضا على المستوى ب ص س عمودا اط ونصل ط التى هى موقع هذا العمود بالنقطتين ب و س ثم نأخذ صَ آ = ص ا ونعمل هذا العمل بعينه فى الزاوية صَ فالمثلثان ص ب ا و صَ بَ آ القائما الزاوية احدهما فى ب والاخر فى بَ يكونان متساويين وايضا المثلثان اص س و آصَ سَ يكونان متساويين فحينئذ ص ب = صَ بَ و ص س = صَ سَ و اب = آبَ و اس = آسَ

وايضا

وايضا بمقتضى بند (١٢٢) تكون الزاويتان صـ ـ ط و صَ ـ َ ـ طَ قائمتين اذا تقرر ذلك فذوا ربعة الاضلاع صـ ـ ط ـ بساوى ذا اربعة الاضلاع صَ ـَ طَ ـَ لانه يمكن انطباق احدهما على الآخر بالتحرير فاذن ـ ط = ـَ طَ و ط ـ = طَ ـَ فينتج من ذلك ان المثلثين ا ـ ط و اَ ـَ طَ القائمى الزاوية احدهما فى ط والآخر فى طَ متساويان فاذن الزاوية ا ـ ط = اَ ـَ طَ لكن الزاوية ا ـ ط هى مقياس ميل المستويين ـ صـ ا و ـ صـ ـ وكذلك الزاوية اَ ـَ طَ هى مقياس ميل المستويين ـَ صَ اَ و ـَ صَ ـَ فاذن هذان الميلان يكونان متساويين فاذن الزاويتان صـ و صَ المجسمتان يمكن انطباقهما

(١٣٨) الزوايا المستوية التى يتركب منها زاوية مجسمة ثلاثية يمكن ان تكون موضوعة على وضع منعكس وان يبرهن ايضا على انها متساوية فى جميع اجزائها لكن هذه الزوايا لا يمكن انطباق بعضها على بعض ويقال لها متماثلة (انظر هندسة ليژاندر)

(الفصل الثالث)

فى الاجسام المنتهية بعدة مستويات وفى بعض خواصها

(١٣٩) المسافة المغلوقة من جميع جهاتها بعدة مستويات تسمى مجسمة والاوفق ان تسمى جسما كما فى (شكل ١٠٦)

واقل ما تحدد به المسافة من جميع جهاتها اربع مستويات وتسمى المسافة فى هذه الحالة هرما مثلثيا مثال ذلك الجسم المرسوم فى (الشكل ١٠٣) وهو صـ ا ـ ـ

ونقاطع السطحين المتجاورين من الجسم يسمى ضلع الجسم فحينئذ ﺼ ﺴ ﺘ هو ضلع الهرم ﺼ ا ﺴ

وكل جسم احد سطوحه كثير الاضلاع وباقى سطوحه مثلثات رؤسها فى نقطة واحدة يسمى هرما

والاجسام تسمى باسماء مختلفة بالنسبة لعدد سطوحها ووضع تلك السطوح فالمنشور كل جسم واقع بين سطحين متقابلين متساويين ومتوازيين وباقى سطوحه تكون متوازية الاضلاع كما فى (شكل ١٠٧)

والمضلعان ا ﺪ ﺴ ﺻ و آ ﺴ ﺪ ﺻ المتقابلان المتساويان فى المنشور يسميان قاعدتى المنشور

والمضلع الذى يعتبر وضع الهرم عليه يسمى ايضا قاعدة الهرم ثم ان كلا من الهرم والمنشور يسمى ثلاثيا ورباعيا على حسب كون قاعدته مثلثا اوذا اربعة اضلاع الخ

وارتفاع المنشور هو العمود النازل من نقطة من احدى قاعدتيه على الاخرى

وارتفاع الهرم هو العمود النازل من رأس هذا الجسم على مستوى قاعدته

ومتوازى السطوح كل منشور قاعدته متوازى الاضلاع كما فى (شكل ١٠٨)

ومتوازى السطوح يكون قائم الزوايا اذا كانت جميع سطوحه قائمة الزوايا

والمكعب المنتظم ذو السطوح الستة هو متوازى السطوح الذى جميع سطوحه مربعات كما فى (شكل ١٠٩)

وقطر كل جسم هو المستقيم الواصل بين رأسى زاويتين مجسمتين غير متجاورتين

(١٤٠) السطحان المتقابلان من متوازى السطوح متساويان وانظار الاشكال المرسومة من رؤس الزوايا المجسمة الثلاثية ينصف بعضها بعضا

وذلك

وذلك لانه يقتضى تعريف هذا الجسم قاعدتاه المتقابلتان وهما ا ب ح ء و ى ف و ش كما فى (شكل ١١٠) حيث انهما متوازيا الاضلاع ومتساويان واضلاعهما المتقابلة متوازية ينتج ان الاضلاع اى و ب ف و ح و و ءش متساوية ومتوازية فاذن السطوح المتقابلة وهى اف و ءو و اش و ب و تكون ايضا متساوية ومتوازية

فاذا رسمنا قطرى شكل مثل او و ءف فمن المعلوم انهما يكونان قطرى متوازى الاضلاع اءوف وهذان القطران ينقسمان بتنصيف احدهما للآخر الى قسمين متساويين فى النقطة و لان المثلثين اوء و ف و و متساويان لان فى كل منهما ضلعا مساويا لنظيره ومجاورا لزاويتين متساويتين فاذن يثبت المطلوب

ومما ينبغى التنبيه عليه ان الزاويتين ف و ء المجسمتين الثلاثيتين المتقابلتين تكونان متماثلتين وان المنشورين ا ب ى ف و و اء ب ى ش و الثلاثيى الزوايا المركب منهما المنشور الكامل يكونان متكافئين ولو كانت سطوح احدهما موضوعة على عكس وضع سطوح الآخر وان اردت البرهنة التامة على هاتين القضيتين فعليك بهندسة ليژاندر او لاكرواس

(شروط تساوى ذوات السطوح الثلاثة والمناشير)

(وخاصية القطوع المصنوعة فى هذه الاجسام)

(١٤١) كل هرمين ثلاثيين زواياهما المجسمة الثلاثية المتناظرة مركبة من مثلثات متساوية وموضوعة على طريقة واحدة يكونان متساويين والهرمان الثلاثيان يكونان ايضا متساويين اذا كان فى كل منها زاوية ذات سطحين مساوية لنظيرتها من الآخر ومحصورة بين سطحين متساويين على التناظر وموضوعين على طريقة واحدة

والمنشوران يكونان متساويين اذا كان فى كل منهما زاوية مجسمة ثلاثية محصورة بين ثلاث مستويات متساوية على التناظر وموضوعة على وضع واحد

وهذه الدعاوى الثلاث يسهل بيانها بالانطباق

(١٤٢) اذا قطع منشور بمستو موازٍ لقاعدته فالقطع الحاصل يساوى هذه القاعدة

وذلك لان مستوى القطع أَ بَ جَ دَ هَ من (شكل ١٠٧) حيث كان موازيا للقاعدة ا ب ج د ه فالمتوازيات ا أَ و ب بَ الخ تكون واقعة بين مستويين متوازيين فهى بالضرورة متساوية فحينئذ جميع الاشكال أ ب و ب ج و ج د الخ متوازية الاضلاع وايضا الزاويتان بَ أَ هَ و ب ا ه هما متساويتان لان اضلاعهما متوازية وانفراجهما متجهان الى جهة واحدة وكذلك كل زاويتين مثل أَ هَ دَ و ا ه د فاذن القطع أَ بَ جَ دَ هَ يساوى القاعدة ا ب ج د ه

(١٤٣) اذا قطعنا هرما بمستو موازٍ لقاعدته فان كلا من اضلاعه وارتفاعه يكون منقسما على نسبة واحدة والقطع يكون مضلعا مشابها للقاعدة

ليكن أَ بَ جَ دَ القطع المصنوع فى الهرم ص ا ب ج د كما فى (شكل ١١١) بحيث كانت المستقيمات ا ب و أَ بَ و ا د و أَ دَ الخ متوازية بمقتضى بند (١٢٦) فالزاويتان ب ا د و بَ أَ دَ تكونان متساويتين والمضلع أَ بَ جَ دَ يكون متساوى الزوايا مع المضلع ا ب ج د وايضا بمقتضى ثمرة (بند ٤٦) يكون

ص ا : ص أَ :: ا د : أَ دَ :: ا ب : أَ بَ الخ

فاذن اضلاع المضلع أَ بَ جَ دَ تكون متناسبة مع نظائرها من المضلع ا ب ج د فحينئذ يكون هذان المضلعان متشابهين انظر بند (٥٧)

(الفصل

(الفصل الرابع)

(فى مساحة احياز المناشير والاهرام)

(١٤٤) المسافة التى يشغلها الجسم تسمى حجما كما هو المشهور فى الاستعمال والاوفق ان تسمى حيزا اوسعة واذا اعتبرنا اناء او جسما مجوفا فان حجمه يسمى مكيالا او معيارا

ويقال للاجسام متساوية الحجم او متكافئة الحجم على حسب امكان انطباق بعضها على بعض او عدمه وعلى حسب تساوى المسافات التى تشغلها تلك الاجسام

(١٤٥) الشكلان المتوازيا السطوح اذا كانا متحدين فى القاعدة والارتفاع يكونان متكافئين

ويمكن ان يحدث عن ذلك صورتان متباينتان تباينا حقيقيا وهما ان القاعدتان العليان الموضوعتان فى مستو واحد اما ان تكونا واقعتين بين متوازيين او غير واقعتين بينهما

فالبرهنة على الصورة الاولى ان يقال ليكن ا ب ى د من (شكل ١١٢) قاعدة مشتركة بين متوازيى السطوح اح و ال المتحدين فى الارتفاع وقاعدتاهما العليان وهما ء ف ح ش و ع ك ل م من حيث انهما واقعتان بين المتوازيين ءم و فل يظهر بالسهولة ان المنشورين اء ع ف ك و ى ش م ب ح ل متساويان انظر (بند ١٤١) لكن متوازى السطوح اح الاول يكافئ الجسم ا ب ش ى ء ف ل م بتمامه الا المنشور ى ش م ل الثانى وكذلك متوازى السطوح ال الثانى يكافئ جميع الجسم ا ب ى ء ف ل م الا المنشور اء ع ك فاذن هذان المتوازيا السطوح متكافئان

واما البرهنة على الصورة الثانية فهى ان متوازيى السطوح المذكورين اذا كانت قاعدتاهما العليان ه و ط ن و ع ك ل م من (شكل ١١٣) موضوعتين فى مستو واحد وكانت قاعدتهما السفلى المشتركة هى ا ب ى د

فان هذين المتوازيي السطوح يكونان ايضا متكافئين لاننا اذا اعتبرنا في متوازي السطوح ا ح ان قاعدته العليا ب و ش واقعة مرة واحدة بين المتوازيين الذين يشتملان على القاعدتين د و ط ق و ع ك لم يكون ايضا مكافئا لمتوازي السطوح ا ط و ا ل فاذا متوازيا السطوح ا ط و ا ل المائلان الى جهتين مختلفتين والمتحدان في القاعدة والارتفاع يكونان متكافئين

فينتج من هذا ان كل متوازي سطوح يمكن تحويله الى آخر قائم الزوايا مكافيء له ومتحد معه في الارتفاع ومكافيء له في القاعدة

(١٤٦) الشكلان المتوازيا السطوح القائما الزوايا المتحدان في القاعدة تكون النسبة بينهما كنسبة ارتفاعيهما

مثال ذلك متوازيا السطوح ا ح و ا ل القائما الزوايا اللذان قاعدتهما ا س كما في (شكل ١١٤) فلنفرض اولا ان ارتفاعيهما وهما ا ے و ا ع على نسبة مشتركة مثل ١٩ : ٧ فاذا قسمنا ا ے الى ١٩ جزأ متساوية فان ا ع يشتمل منها على ٧ واذا وصلنا من جميع نقط قسمة الخط ا ے مستويات توازي ا س ی فان متوازي السطوح ا ح يكون بالبداهة مركبا من تسعة عشر حجما جزئيا ذات ارتفاع واحد وقاعدة واحدة ومتوازي السطوح ا ل يكون ايضا مركبا من ٧ من هذه الحجوم الجزئية فاذن هذان المتوازيا السطوح تكون النسبة بينهما :: ١٩ : ٧ وبهذا يثبت المطلوب

فاذا كان الارتفاعان ا ے و ا ع على نسبة متباينة فحجما الجسمين ا ح و ا ل يكونان ايضا على نسبة الارتفاعين ويستعمل في بيان ذلك طريقة برهنة بند (٣٨)

(١٤٧) المتوازيا السطوح القائما الزوايا اللذان لهما ارتفاع واحد نسبتهما كنسبة قاعدتيهما

ولاجل بيان هذه الدعوى نفرض ان متوازيي السطوح ا ح و ع و المتحدين

في

فى الارتفاع اب لهما سطحان ىح و ىو متجاوران وداخلان بين المتوازيين سل و ف و كما فى (شكل ١١٥) فاذا امددنا المستقيمين مد و ع ك الى ط والى ى فانه يحدث متوازى سطوح ىح يكون متحدا لقاعدة مع متوازيى السطوح اح و ع و فبمقتضى الدعوى السابقة يحصل

الجم ىح : الجم اح :: ع ى : ا ب

والجم ع و : الجم ىح :: ع ك : ى ب

فاذا ضربنا هاتين المتناسبتين على الترتيب وحذفنا المكرر المشترك وهو جسم ىح تحصل

الجم ع و : الجم اح :: ع ى × ع ك : ا ب × ب ى لكن ع ى × ع ك = السطح ع ى ل ك و ا ب × ب ى = السطح اب ى د فاذا متوازيا السطوح المتحدان فى الارتفاع تكون نسبتهما كنسبة قاعدتيهما

(١٤٨) كل متوازيى سطوح قائمى الزوايا فالنسبة بينهما كنسبة الحاصلين من ضرب قاعدتيهما فى ارتفاعيهما اوكنسبة الحاصل من ضرب ابعاد احدهما الثلاثة فى بعضها الى الحاصل من ضرب ابعاد الآخر كذلك

(البرهان الاول) ان يقال ليكن كما فى (شكل ١١٦) اح و ع و متوازيى السطوح القائمى الزوايا فاذا عملنا متوازى السطوح ع ن كان بمقتضى القضيتين الاخيرتين

الجم اح : الجم ع ن :: ا ب ى د : ع ى ل ك

والجم ع ن : الجم ع و :: ع ص : ع م

فحينئذ اذا ضربنا على الترتيب واختصرنا تحصل

الجم اح : الجم ع و :: ا ب ى د × ع ص : ع ى ل ك × ع م

و :: ا ب × ب ى × ب ف : ع ى × ى ل × ى ط

فينتج من هذا ومما ذكر فى (نمرة ٧٠) انه يمكن ان يؤخذ بدل متوازى السطوح القائم الزوايا حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه او حاصل

ضرب ابعاده الثلاثة في بعضها وذلك لاننا اذا اعتبرنا ان احد اضلاع المكعب وحدة مقياس خطي وان الاضلاع الثلاثة المتصلة من متوازي سطوح آخر قائم الزوايا هي مقدار هذه الوحدة ٣ مرات و ٥ و ٩ فان هذين الجسمين تكون النسبة بينهما كنسبة ١ : ١٣٥ او يقال والمعنى واحد ان المكعب المعتبر وحدة مقياس جسمي يكون داخلا ١٣٥ مرة في متوازي السطوح وهذا معنى القول بطريق الاختصار ان حجم متوازي السطوح القائم الزوايا يساوي الحاصل من ضرب اضلاعه الثلاثة المتصلة في بعضها او الحاصل من ضرب قاعدته في ارتفاعه فحينئذ حجم المكعب المنتظم ذي السطوح الستة يساوي مكعب احد اضلاعه

(البرهان الثاني) ان يقال يمكن ان نبرهن على هذه القضية من غير واسطة في صورة ما اذا كانت ابعاد متوازي السطوح القائم الزوايا على نسبة مشتركة بفرض ان ضلع المكعب المأخوذ وحدة مقياس داخلا ٥ مرات في الطول اد و ٣ مرات في العرض اب و ٨ مرات في الارتفاع اى فمن المعلوم انه يمكن وضع ١٥ مكعبا في جميع اتساع القاعدة ابـد ووضع ٨ مكعبات في سمت الارتفاع اى فاذن المتوازي السطوح القائم الزوايا يشتمل على ١٥ × ٨ = ١٢٠ فعلى العموم حجم كل متوازي سطوح قائم الزوايا يساوي الحاصل من ضرب قاعدته في ارتفاعه فينتج مما تقدم ان حجم متوازي السطوح ايا كان وكذا حجم المنشور على العموم يساوي الحاصل من ضرب قاعدته في ارتفاعه

(١٤٩) الهرمان الثلاثيان المتكافئان في القاعدة المتحدان في الارتفاع يكونان متكافئين

(البرهان الاول) ان يقال ليكن في احد الهرمين المذكورين وهو صـ ا ـ ـ من (شكل ١١٧) عدة معينة من مناشير زائدة كالمنشور ا ـ ـ ـ ف وعدة معينة من مناشير ناقصة كالمنشور ع ـ ك ـ ـ ش وكلها ذات ارتفاع واحد وليكن ايضا في الهرم الثاني من المناشير مثل تلك العدة فتبين

بالسهولة

بالسهولة انه فى كل هرم ثلاثى فاضل المناشير الزائدة على المناشير الناقصة المساوى للمنشور الزائد الاول ا ب ـ ء ف ـ يمكن ان يصير اقل من كل مقدار مفروض وبناء على ذلك ففاضل كل هرم ثلاثى عن مجموع المناشير الزائدة يمكن ايضا ان يصغر كما يراد

اذا تقرر هذا يقال ليكن ت الهرم الثلاثى الذى هو ص ا ب ـ و تَ الهرم الثلاثى صَ اَ بَ ـَ و ط مجموع المناشير الزائدة فى الهرم الاول و طَ مجموع المناشير فى الهرم الثانى وليكن الهرم الاول ت غير مساو للهرم الثانى تَ فحينئذ يكون

طَ ــ تَ < ت ــ تَ فاذن يكون طَ < ت

وحيث ان طَ = ط يكون ط < ت وهذا محال لان مجموع المناشير الخارجة هو بالضرورة اكبر من الهرم الثلاثى المناظر لها فاذن الهرمان الثلاثيان لا يمكن ان يكونا غير متساويين فى الحجم

البرهان الثانى ان يقال ينتج من دعوى بند (١٤٣) اننا اذا قطعنا الهرمين المفروضين بمستويات موازية للقاعدتين على ابعاد متساوية فان القطوع المتناظرة تكون متكافئة فاذا توهمنا فى كل واحد من هذين الهرمين عدة مناشير متحدة غير متناهية فالتى تنسب لهرم تكافىء حجمه فينتج من هذا ان هذين الهرمين يكونان متكافئين

(١٥٠) ذو السطوح الثلاثة يكافىء ثلث المنشور الثلاثى الذى هو مثله فى القاعدة والارتفاع

فليكن ا ب ـ ف من (شكل ١١٨) هو ذو السطوح الثلاثة المطلوب ولنتمم المنشور ا ب ـ ء ـ ف ونرسم من النقط ا و ب و ـ مستويا ا ف ـ يقسم الهرم ا ء ـ ب ف الرباعى الى الهرمين ا ء ـ ف و ا ـ ب ف الثلاثيين

فالهرمان ا ب ـ ف و ء ف ـ ا حيث انهما متحدان فى الارتفاع

ومتساويان فى القاعدتين ا ب ب و ى ب ف فهما متكافئان وكذلك الهرمان ى ا ب ف و ا ب ب ف متكافئان لان قاعدتيهما المتساويتين ا ى ب و ا ب ب موضوعتان على مستو واحد ورأساهما فى نقطة واحدة وهى ف فاذن الاهرام الثلاثة التى يتركب منها المنشور تكون متكافئة فاذن الهرم ا ب ب ف هو ثلث المنشور المتحد معه فى القاعدة والارتفاع فينتج من هنا ومن ثمرة (١٤٨) نتيجة هى ان الهرم الثلاثى بل وكل هرم من حيث هو مساحته ثلث الحاصل من ضرب قاعدته فى ارتفاعه

مثال ذلك الهرم صه ا ب ب ى ب الخماسى كما فى (شكل ١١٩) فانه يساوى مجموع الاهرام الثلاثة الجزئية وهى صه ا ب ب و صه ا ب ى و صه ا ى ب

(١٥١) كل هرم ثلاثى مقطوع بمستو مواز لقاعدته فهو مكافئ لثلاثة اهرام يكون ارتفاعها هو ارتفاع المقطوع وتكون قاعدة احدها هى قاعدة المقطوع السفلى وقاعدة الثانى هى قاعدة المقطوع العليا وقاعدة الثالث وسط متناسب بين هاتين القاعدتين

فلنرسم من النقطة بَ التى هى رأس احدى زوايا قاعدة المقطوع العليا بَ ى من (شكل ١٢٠) موازيا للضلع اَا ونصل خطين ى ب و اَ بَ

فمن المعلوم اولا ان الهرم المقطوع مركب من ثلاثة اهرام كاملة وهى ا ب بَ و اَ بَ بَ ا و اَ ب بَ لان قاعدة الاول هى المثلث ا ب ب وقاعدة الثانى المثلث اَ بَ بَ وارتفاع كل منهما هو ارتفاع المقطوع واما الهرم اَ ب بَ الثالث فقاعدته المثلث اَ ب ب ورأسه فى بَ فحينئذ هو مكافئ لهرم اخر يكون مثله فى القاعدة ورأسه فى ى بسبب ان بَ ى مواز ا اَ لكن حيث ان هذا الهرم الاخير يمكن ان تعتبر قاعدته

المثلث

المثلث ا ـ ى ورأسه النقطة ~~س~~ يمكن ان يكون ايضا فى الارتفاع مثل المقطوع فاذن بقى علينا ان نبين ان المثلث ا ـ ى هو وسط متناسب بين ا ـ س و ~~ا~~ ـ ~~س~~ فحيث ان المثلثين ا ـ ى و ا ـ س المتحدين فى الارتفاع نسبتهما كنسبة قاعدتيهما اى و اس يتحصل

ا ـ ى : ا ـ س :: اى : اس ثم تربع هذه المناسبة فيحدث

$\overline{ا ـ ى}^2$: $\overline{ا ـ س}^2$ :: $\overline{اى}^2$: $\overline{اس}^2$

وايضا المثلثان ا ـ س و ~~ا~~ ـ ~~س~~ المتشابهان يفيدان هذه المناسبة

~~ا~~ ـ ~~س~~ : ا ـ س :: $\overline{~~اس~~}^2$ او $\overline{اى}^2$: $\overline{اس}^2$

فبسبب النسبة المشتركة يكون $\overline{ا ـ ى}^2$: $\overline{ا ـ س}^2$ :: ~~ا~~ ـ ~~س~~ : ا ـ س

فاذن $\overline{ا ـ ى}^2$ = ا ـ س × ~~ا~~ ـ ~~س~~ أو ~~ا~~ ـ ~~س~~ : ا ـ ى :: ا ـ ى : ا ـ س

وهذا الحاصل هو تمام بيان القضية المذكورة

وهذه الخاصية المذكورة للهرم الثلاثى المقطوع هى ايضا موجودة فى كل هرم مقطوع على موازاة القاعدة

(١٥٢) اذا قطع منشور ثلاثى بمستو مائل على قاعدته فالجسم الباقى يكون مكافئا لمجموع الاهرام الثلاثة التى تكون قاعدتها قاعدة المنشور وتكون رؤسها رؤس زوايا القطع

ليكن ى ف ـ غير مواز ا ـ س كما فى (شكل ١٢١) فاذا رسمنا مستويين اف ـ و اف ـ فالمنشور الثلاثى يصير بالبداهة منحلا الى ثلاثة اهرام قاعدة الاول ا ـ س ورأسه نقطة ف والثانى وهو ا ـ ـ ف الذى قاعدته ا ـ ـ ورأسه ف يكافى الهرم ا ـ ـ س الذى رأسه س

لكن هذا الهرم الاخير يمكن ان تكون قاعدته ا ـ مـ ة ورأسه ـ ت
والثالث وهو الهرم اد ـ ف يمكن ان يتغير اولا الى هرم اد ف ـ ثم هذا
الاخير يمكن أن يتغير الى اد ـ مـ لكن الهرم اد ـ مـ يمكن ان تعتبر
قاعدته ا مـ ـ ورأسه د فاذن المنشور ا مـ ـ د ف ـ المقطوع
ينحل كما هو منطوق الدعوى

فاذا كانت الاضلاع اد و مـ ف و ـ ـ اعمدة على القاعدة
ا ـ مـ فحجم المنشور يكون بالضرورة = ا ـ مـ × $\frac{\text{اد + مـ ف + ـ ـ}}{3}$

ومنه ينتج ان مساحة كل منشور ثلاثى هى الحاصل من ضرب
القطع العمودى على الاضلاع الثلاثة المتوازية فى ثلث مجموع هذه الاضلاع
بعينها

(الفصل الخامس)
(فى تشابه المجسمات)

(١٥٣) كل جسمين منتهيين بمستويات يقال لهما متشابهان اذا كانا
داخلين تحت عدة واحدة من مستويات متشابهة وكانت زواياهما المجسمة
متساوية على التناظر

فينتج من هذا التعريف ان المجسمين المتشابهين اضلاعهما المتناظرة تكون
متناسبة وسطوحهما المتناظرة تكون نسبتها الى بعضها كنسبة مربعات
الاضلاع المتناظرة وينتج من ذلك ايضا ان هذين المجسمين يمكن انحلالهما
الى عدة واحدة من الاهرام الثلاثية المتشابهة على التناظر والموضوعة على
وضع واحد

وهاتان النتيجتان مبرهن عليهما بالتدقيق فى هندسة ليژاندر وهندسة
لاكورواس وتفصيل ذلك هنا لا يحتمله هذا المختصر

(١٥٤) كل هرمين متشابهين فالنسبة بينهما كنسبة مكعبات اضلاعهما
اوخطوطهما المتناظرة

وبرهان ذلك ان يقال حيث انه فى المجسمات المتشابهة تكون النسبة بين

سطوحهما المتناظرة كالنسبة بين مربعات خطوطهما المتناظرة

فاذا فرضنا ان صط و صَطَ من (شكل ١٢٢) ارتفاعان متناظران للهرمين صاس و صَاَسَ يكون

$\overline{اس}^2 : \overline{اَسَ}^2 :: \overline{صط}^2 : \overline{صَطَ}^2$

فاذا ضربنا هذه المناسبة فى

$\frac{صط}{٣} : \frac{صَطَ}{٣} :: صط : صَطَ$

يحصل

$\overline{اس}^2 \times \frac{صط}{٣} : \overline{اَسَ}^2 \times \frac{صَطَ}{٣} :: \overline{صط}^3 : \overline{صَطَ}^3$

لكن $\overline{اس}^2 \times \frac{صط}{٣}$ هو مساحة جرم الهرم صاس و $\overline{اَسَ}^2 \times \frac{صَطَ}{٣}$ هو ايضا مساحة جرم الهرم صَاَسَ فاذن هذان الهرمان المتشابهان تكون النسبة بينهما كنسبة مكعبى ارتفاعيهما او كنسبة مكعبات اضلاعهما المتناظرة

ومن هنا يمكن ان يبرهن كما فى طريقة (بند ٨٢) على ان الجسمين المتشابهين تكون النسبة بينهما كنسبة مكعبات اضلاعهما المتناظرة

(الفصل السادس)

(فى الاجسام المستديرة وخواصها الاصلية)

(١٥٥) الاجسام المستديرة هى الحاصلة من حركة سطح مستو يتوهم دورانه حول خط مستقيم ويبحث فى الهندسة الاصلية عن ثلاثة اجسام مستديرة وهى الاسطوانة القائمة والمخروط القائم والكرة

فالاسطوانة القائمة هى جسم ناشئ من دوران شكل مستطيل حول احد اضلاعه المسمى بسبب ذلك محورا وفى هذا الدوران الضلعان العمودان على المحور يرسمان دائرتين متساويتين تسميان قاعدتى الاسطوانة فحينئذ

الاسطوانة اب قاعدتاها الدائرتان اجه و ا َجَ وحورها المستقيم ب س

وعلى كل حال فكل مستقيم فرضناه يدور حول منحن اياكان ويبقى دائما موازيا لوضعه الاصلى فانه يتولد منه سطح اسطوانى فاذا كان المنحنى الذى يرشد هذا المستقيم المسمى مولدا دائرة وكان ذلك المولد مائلا على مستوى هذه الدائرة كانت الاسطوانة مائلة

ومن المعلوم ان قاعدتى الاسطوانة المتوازيتان تكون جميع القطوع الموازية لهما دوائر كل واحدة منها تساوى احدى هاتين القاعدتين ومن المعلوم ايضا ان كل قطع يمر بالمحور متوازى الاضلاع

(١٥٦) المخروط القائم هو الجسم المتولد من دوران المثلث القائم الزاوية على احد اضلاع الزاوية القائمة المسمى بسبب ذلك محورا فحينئذ صا من (شكل ١٢٤) هو محور المخروط صاد س القائم والخط س الذى يتولد منه السطح المنحنى لهذا المخروط يسمى مولدا

وقاعدة هذا الجسم هى الدائرة د س المرسومة بالخط اب الذى هو ضلع المثلث صاب المولد ورأسه هى النقطة ص

وبالجملة فكل مستقيم فرضناه يدور من نقطة حول منحن اياكان فانه يولد سطحا مخروطيا فاذا كان المنحنى الذى يرشد حركة المولد دائرة ولم يكن المحور عمودا على مستوى هذا المنحنى سمى المخروط مائلا ذا قاعدة دائرية انظر (شكل ١٢٥)

فينتج من تولد المخروط اولا ان كل قطع موازٍ للقاعدة دائرة وثانيا ان كل قطع مصنوع بالمحور مثلث

وحيث ان الدوائر اشكال متشابهة بمقتضى بند (٨٣) وان انصاف اقطار القطوع المذكورة نسبتها الى بعضها كنسبة ابعاد مراكزها عن رأس المخروط ينتج ان سطوح القطوع الدائرية نسبتها الى بعضها كالنسبة بين مربعات هذه الابعاد فاذن

الدائرة ا ب : الدائرة أ بَ :: جـ ا^٢ : جـ أَ^٢

فيحصل قطوع هى منحنيات مختلفة بحسب وضع المستوى القاطع بالنسبة للضلع جـ ب من المخروط وتفصيل هذه المنحنيات مع البحث فيها من مباحث علم تطبيق الجبر على الهندسة

(١٥٧) الكرة جسم منته بسطح منحن جميع نقطه على بعد واحد من نقطة داخله تسمى مركزا

ويمكن ان يتوهم ان الكرة حاصلة من دوران نصف دائرة حول قطرها فحينئذ كل قطع كرة مصنوع بمستو مار بالمركز فهو دائرة مساوية للدائرة المولدة * مثال ذلك الدائرة ا د ب التى مركزها جـ فان مركزها مركز الكرة وهذه الدائرة تسمى ايضا دائرة عظمى للكرة

وعلى كل حال فكل مستو قطع كرة يقطع سطحها على محيط دائرة

والدائرة الصغرى هى التى لا يمر مستويها بالمركز مثالها م ة ب ةَ م

وقطب دائرة الكرة هو نقطة فى السطح على بعد واحد من جميع نقط محيط هذه الدائرة ومن المعلوم ان الدائرة سواء كانت عظمى او صغرى لها قطبان واقعان على مستقيم عمود على هذه الدائرة ومار بالمركز فحينئذ النقطة ط هى قطب الدائرة ا د ب العظمى كما انها قطب الدائرة م ة ب الصغرى

وكل دائرتين من الكرة عظميين يتقاطعان ضرورة فى جزئين متساويين لان تقاطعهما المار بالمركز هو القطر

وكل نقطتين على الكرة غير متقابلتين بالتقاطر يحددان سمت دائرة عظمى لان هاتين النقطتين ومركز الدائرة تحدد وضع مستو

والجزؤ سـ ا ب سـ كما فى (شكل ١٢٧) من سطح الكرة الواقع بين نصفى دائرتين عظميين متقاطعين يسمى شفة كروية وجزؤ حجم الكرة الداخل بين المستويين ب ا سـ و ب سـ سـ اللذين هما نصفا دائرتين عظميين يسمى

ضلع الكرة

كل ثلاث دوائر تتقاطع على الكرة تحدث مثلثا كرويا واضلاع هذا المثلث يمكن ان تحدث من ثلاثة اقواس دوائر عظمى اوصغرى لكن فى العادة لايعتبر الا المثلثات الكروية التى اضلاعها تكون اقواس دوائر عظمى كل قوس منها اصغر من نصف المحيط وينتج من ذلك ومن ثمرة (٣٥) ان مجموع ضلعى المثلث الكروى دائما اكبر من الضلع الثالث وذلك لان الاقواس ا ب و ا ح و ب ح تكون قياما للزوايا ا و ب و ا و ح و ب و ح المستوية المركبة للزاوية و ذات السطوح التى رأسها مركز الكرة ومجموع كل زاويتين من هذه الزوايا اكبر من الثالثة

والمنطقة جزء من سطح الكرة واقع بين مستويين متوازيين هما قاعدتاها فاذا كان احد هذين المستويين مماسا لسطح الكرة لم يكن للمنطقة الا قاعدة واحدة وتسمى حينئذ طيلسانا كرويا

والقطعة الكروية جزء من جسم الكرة الواقع بين مستويين متوازيين هما قاعدتاها

ومحور المنطقة او القطعة الذى هو ارتفاعها هو البعد بين الدائرتين المتوازيتين اللتين هما قاعدتا المنطقة او القطعة

والقطع الكروى هو جسم متولد من دوران قطع دائرة حول احد نصفى القطرين

والمستوى يكون مماسا للكرة اذا لم يكن مشتركا معها الا فى نقطة واحدة كما فى (شكل ١٢٩)

ويقال للجسم مرسوم على الكرة اذا كانت جميع سطوحه مماسة لتلك الكرة

(١٥٨) اقصر بعد بين نقطتين على الكرة هو قوس الدائرة العظمى الذى يجمع بين النقطتين

ليكن ا ب من (شكل ١٢٨) هو قوس الدائرة العظمى الذى يجمع بين

النقطتين ا و ب . فلو فرضنا ذ نقطة من نقط اقصر خط بين ا و ب . ثم رسمنا منها قوسين ذا و ذب من دائرتين عظمين واخذنا ام = اذ لكان بمقتضى الثمرة السابقة ام + مب < اذ + ذب فاذا اختصرنا يكون مب < ذب

وحيث كان اقصر بعد من ا الى ذ يساوى اقصر بعد من ا الى م يكون لكل من البعدين امب و اذب جزء مساو لجزء من الآخر لكن البعد اذب هو بالفرض اقصر فاذن يكون البعد بين ذ و ب اقصر من البعدين م و ب وهذا خلف لان القوس ذب > من القوس مب فاذن لا يمكن وجود نقطة من اقصر خط بين ا و ب مرسوم على الكرة تكون خارجة عن قوس الدائرة امب العظمى فاذن هذا القوس هو اقصر بعد بين طرفيه

ثم ان الزاوية التى تحدث بين قوسى دائرتين عظمين مساوية للزاوية التى تحدث من مماسى هذين القوسين فى نقطة واحدة * فالزاوية تَ ط تَ كما فى (شكل ١٢٩) الحادثة من المستقيمين تط و تَط العمودين على المقطع المشترك بين الدائرتين طاطَ و طآطَ والمرسومين فى كل من الدائرتين هى نفس زاوية هاتين الدائرتين وهذه الزاوية الكروية تكون قياس القوس اآ المرسوم من النقطة ط باعتبارها قطبا بين الضلعين اط و آط الممدودين اذا لزم مدهما وببعد نصف قطر مساو للضلع المربع المرسوم فيها

(١٥٩) كل مستو عمود على نهاية نصف القطر فهو مماس للكرة

فاذا كان المستوى تطتَ كما فى الشكل السابق عمودا على نهاية نصف القطر سط فكل نقطة مثل ظ مأخوذة على هذا المستوى تصير بالبداهة خارج الكرة لان سظ > سط فاذن المستوى تطتَ ليس له

الانقطة اشتراك مع سطح الكرة فاذن هو مماس لهذا السطح

فينتج من هذا ان الكرتين المتماستين يكون مركزاهما ونقطة تماسهما على خط مستقيم واحد

(الفصل السابع)

(فى مساحة سطح الاجسام المستديرة)

(١٦٠) كل سطح محدب فهو اصغر من كل سطح آخر يحيط به راكزا على محيطه والمراد بالسطح المحدب هو الذى لا يمكن ان يمر به مستقيم فى اكثر من نقطتين

فليكن واسى من (شكل ١٣٠) السطح المفروض فاذا لم يكن اصغر من جميع السطوح المحيطة به يفرض ان السطح طاسى اصغر تلك السطوح وان نهاية ما يمكن فيه انه مساو للسطح واسى ومن نقطة ايا كانت مثل و يمر مستو مد يمس السطح واسى فهذا المستوى يلاقى السطح طاسى والجزء الذى يسقطه هذا المستوى من السطح هو بالبداهة اكبر من السطح المنتهى بهذا السطح فاذن اذا حفظنا الباقى من السطح طاسى امكن ان يجعل المستوى عوضا عن الجزء المطروح فيحدث سطح جديد محيط بالسطح واسى اصغر من السطح الاول طاسى لكن هذا السطح طاسى المذكور هو بالفرض اصغر من الجميع فاذن هذا الفرض لا يمكن وقوعه وبهذا يثبت المطلوب

ومن هذا الاصل تنتج نتائج

الاولى اذا كان السطح المحدب المنتهى بمحيطين كالسطوح الاسطوانية مثلا محاطا بسطح آخر ايا كان منته بهذين المحيطين فان هذا السطح المحاط يكون اصغر من السطحين الآخرين

الثانية اذا كان سطح محدب مثلا كسطح الكرة يحيط به من جميع جهاته سطح آخر فان السطح المحاط يكون دائما اصغر من السطح المحيط

الثالثة يمكن توهم مجسم مرسوم على الكرة يختلف سطحه وحجمه قليلا

ما

مّا امكن عن سطح الكرة وجمها اللذين هما اصغر من سطح الجسم وجمه

(١٦١) مساحة السطح المنحنى لاسطوانة قائمة تساوى حاصل ضرب محيط قاعدتها فى ارتفاعها

ليكن سا من (شكل ١٣١) نصف قطر قاعدة الاسطوانة القائمة و سـ ارتفاعها فاذا اعتبرنا منشورا مرسوما على تلك الاسطوانة فانه يمكن تكثير سطوحه الضلعية الى ان يفضل مجموع سطوحه على سطح الاسطوانة المنحنى بمقدار اصغر من اى مقدار مفروض ففى هذه الحالة محيط قاعدة المنشور يختلف عن محيط قاعدة الاسطوانة بمقدار يكون اقل من كل مقدار معين فاذا اشرنا بالحرف ط الى محيط كثير الاضلاع الذى هو قاعدة المنشور المرسوم الاسطوانة وبالحرف ف للارتفاع المشترك بين المنشور والاسطوانة فساحة الجسم الاول الذى هو المنشور من غير ان نعتبر القاعدتين تكون ط × ف وهذا المقدار المتغير حيث كان حداه السفليان ح × ف و سـ بفرض ان ح محيط الدائرة حا وان سـ السطح المطلوب يكون بمقتضى نمرة (٧٥) سـ = ح × ف

وهذه النتيجة تحقق ايضا اذا لاحظنا ان اتساع سطح الاسطوانة القائمة هو عبارة عن مستطيل قاعدته وارتفاعه محيط الاسطوانة وارتفاعها

(١٦٢) مساحة السطح المنحنى لمخروط قائم تساوى نصف ضلعه مضروبا فى محيط قاعدته

فاذا فرضنا كما فى البيان السابق هرما متحد الارتفاع مع المخروط ومرسوما عليه كان سطح الهرم دائما اكبر من سطح المخروط لانا اذا اسندنا قاعدة الهرم الى قاعدة هرم آخر مساوله واسندنا ايضا قاعدة المخروط الى قاعدة مخروط آخر مساوله فان سطح الهرمين يحيط من كل الجهات بسطح المخروطين فاذن السطح الاول يكون اكبر من الثانى فاذن سطح المخروط اصغر من سطح الهرم المرسوم عليه

اذا تقرر هذا يقال اذا اشرنا بالحرف ف الى ضلع المخروط او العمود

النازل من الرأس على احد اضلاع المضلع المرسوم على القاعدة وكان ط محيط هذا المضلع فان سطح الهرم المرسوم على المخروط يكون مساويا ط × ب/٢ لكن هذا المقدار المتغير يكون حداه السفليان ح × ب/٢ و س بجعل ح محيط قاعدة المخروط وس السطح المطلوب فاذن يحصل بمقتضى بند (٧٥) س = ح × ب/٢

وانساع السطح المنحنى لمخروط قائم هو بالمشاهدة عبارة عن قطع دائرة نصف قطره يساوى ضلع المخروط وقوسه يساوى محيط قاعدة هذا الجسم

(١٦٣) مساحة السطح المحدب من مخروط ناقص قائم ذى قاعدتين متوازيتين تساوى نصف مجموع محيطى القاعدتين مضروبا فى ضلع المقطوع فليكن المخروط المقطوع اى المخروط الناقص اـف من (شكل ١٣٢) فنرسم ـش عمودا على صـ ومساويا للمحيط سـ ونصل صـش ومن النقطة ـ نرسم ـك موازيا ـش ومن النقطة م التى هى منتصف ـ نرسم ايضا مد موازيا ـش

فيحصل من هذا العمل ان ـك يساوى المحيط د و مد يساوى المحيط وم وذلك لانه بسبب تشابه المثلثين صد و صس يكون

صـ : صـ :: د : س :: المحيط د : المحيط س

وايضا بسبب تشابه المثلثين صـك و صـش يكون

صـ : صـ :: ـك : ـش

فاذن المحيط د : المحيط س :: ـك : ـش

لكن ـش = المحيط س فاذن ـك = المحيط د وبمثل هذا يبرهن على ان مد = المحيط وم

اذا تقرر هذا يقال حيث ان سطح المثلث صـش يساوى سطح المخروط صـ الكامل وان سطح المثلث صـك يساوى سطح المخروط

صـ

صـ ف ـ كان من المعلوم ان السطح المحدب للمخروط الناقص ا ـ ف = سطح شبيه المنحرف ـ شـ ك فاذن هذا السطح من غير ان ندخل فيه القاعدتين = $\frac{\text{المحيط سـ + المحيط ى}}{2}$ × ـ

ويمكن ان يقال ايضا ان السطح المحدب للمخروط الناقص يساوي ضلعه مضروبا في محيط القطع المعمول على بعد واحد من قاعدتيه لان م ى او المحيط و م = $\frac{\text{المحيط سـ + المحيط ى}}{2}$

(١٦٤) مساحة السطح المتولد من حركة نصف مضلع منتظم مرسوم في نصف دائرة يدور على قطرها تساوي حاصل ضرب هذا القطر في محيط الدائرة المرسومة داخل ذلك المضلع

فليكن ا ـ سـ ى ـ ... شـ من (شكل ١٣٣) نصف المضلع المنتظم المرسوم في نصف الدائرة فمن النقطتين ـ و سـ ومن النقطة ع التي هي منتصف سـ ـ تقام على القطر ا شـ اعمدة ـ ك و سـ ل و ع ى ومن النقطة ـ يرسم ـ م موازيا ا شـ ويوصل ع و باعتبار و مركز المضلع

فحيث ان المثلثين سـ ـ م و ى ع و اضلاعهما المتناظرة متعامدة فهما متشابهان بمقتضى بند (٥١)

فحينئذ سـ ـ : ع و :: ـ م : ع ى او سـ ـ : المحيط ع و :: ـ م : المحيط ع ى فبالنتيجة يكون

سـ ـ × المحيط ع ى = ـ م × المحيط ع و

والضلع سـ ـ بدورانه حول القطر ا شـ يتولد منه سطح محدب من مخروط ناقص مساحته سـ ـ × المحيط ع ى بمقتضى بند (١٦٣) فاذن مساحته ايضا هي ـ م × المحيط ع و

فينتج من هذا ان المنطقة الحادثة من دوران احد اضلاع المضلع

مساحتها هي حاصل ضرب ارتفاع هذه المنطقة في محيط الدائرة التي يكون ع و نصف قطرها فاذن السطح المحدب الكامل يساوي القطر اب × المحيط ع و اي محيط الدائرة المرسومة داخل المضلع

(١٦٥) مساحة سطح الكرة هو الحاصل من ضرب قطرها في محيط دائرة عظمى

البرهان الاول ان يقال اذا رسمنا على الدائرة العظمى من الكرة مضلعا منتظما ذا عدد زوجي من الاضلاع وهو م د ط و ر ض من (شكل ١٣٤) فان السطح المرسوم بهذا المضلع تكون مساحته م ص × المحيط اب انظر بند (١٦٤) وهذا السطح اكبر من سطح الكرة س ا لكن الفاضل الذي بينهما يمكن ان يصغر كما يراد بزيادة عدة اضلاع المضلع المولد كما يراد انظر بند (١٦٠) ففي مثل هذه الصورة القطر م ص يزيد على القطر ا ب بمقدار اصغر من كل مقدار مفروض فحينئذ المقادير الثلاثة التي هي م ص × المحيط اب و ا ب × المحيط اب والسطح ص المطلوب يكون حكمها حكم المقادير الثلاثة المذكورة في نمرة (٧٥) وهي غ و ا و ب فاذن

ص = ا ب × المحيط اب

البرهان الثاني ان يقال اذا فرضنا ان سطح الكرة مقسوم الى عدد لا يحصى من المناطق ذات القواعد المتوازية فان هذه المناطق يمكن ان نعتبرها من غير خطا معتبر مناطق سطح دوراني يكون ارتفاعه قطر الكرة فحينئذ يجوز ان يوضع هذا السطح موضع سطح الكرة فاذن بمقتضى الدعوى السابقة سطح الكرة يساوي الحاصل من ضرب قطرها في محيط احدى دوائرها العظمى

وسطح الدائرة العظمى مساحته هي حاصل ضرب محيط هذه الدائرة في ربع قطرها وسطح الكرة يساوي الحاصل من ضرب محيط الدائرة المذكورة في القطر بتمامه فاذا اشرنا بالحرف ر الى نصف قطر الكرة وبالحرف د الى قطرها وبالحرف ح الى محيط الدائرة العظمى فان سطحها يكون د ح

=

يكون $ب = \frac{ح}{٢ر}$ فبسبب ان $ب ء^{٢} = ٤ ب ر^{٢} = ٢ ر ح =$ بمقتضى بند (٧٥) سطح الدائرة هو $ب ر^{٢}$ فاذن يكون سطح الكرة اربعة امثال سطح احدى الدوائر العظمى

فينتج من هذا وبطريقة مشابهة لطريقة نمرة (٧٦) اولا ان سطح كل منطقة ذات قاعدة واحدة او قاعدتين يساوى حاصل ضرب ارتفاعها فى محيط دائرة عظمى من الكرة التى تنسب اليها هذه المنطقة وثانيا ان سطح الشقة الكروية يساوى القوس الذى تقاس به زاوية هذه الشقة مضروبا فى القطر لان نسبة الشقة الى سطح الكرة كنسبة قوس هذه الشقة الى المحيط بتمامه

(الفصل الثامن)

(فى مساحة حجم الاجسام المستديرة)

(١٦٦) حجم الاسطوانة القائمة او المائلة يساوى حاصل ضرب قاعدتها فى ارتفاعها

فاذا اعتبرنا منشورا مرسوما على اسطوانة ا ء ب يختلف حجمه عن حجم هذا الجسم المستدير باقل ما يمكن كما فى (الشكل ١٣١) فان قاعدة المنشور تكون نهايتها قاعدة الاسطوانة فحينئذ اذا اشرنا بالحرف ط الى سطح المضلع المرسوم على قاعدة الاسطوانة وبالحرف ف الى ارتفاع هذا المنشور الذى قاعدته هى هذا المضلع فان حاصل $ط \times ف$ يكون مساحة حجم هذا الجسم ويكون حده الاسفل ان السطح $ا ح \times ف$ اى حجم الاسطوانة فاذن المساحة الحقيقية لهذه الاسطوانة تكون م و $م =$ السطح $ا ح \times ف$

(١٦٧) حجم شكل مخروط مساحته هى الحاصل من ضرب قاعدته فى ثلث ارتفاعه

فليكن ط سطح المضلع المرسوم على قاعدة المخروط و ف ارتفاع هذا الجسم كما فى (شكل ١٢٥) فيتصور ان حجم الهرم الذى قاعدته

هذا المضلع المذكور وارتفاعه هو ارتفاع المخروط يمكن ان يزيد عن حجم هذا المخروط باقل ما يمكن وحجم الهرم = ط × ب/٣ فحينئذ اذا كان م هو المساحة الصحيحة للمخروط وكان اس هو نصف قطر قاعدته كان حاصل ط × ب/٣ حداه الاسفلان هما السطح اس × ب/٣ و م فاذن يحصل م = السطح اس × ب/٣

(تنبيه) يمكن ان يبرهن ايضا بالسهولة على القضيتين النظريتين السابقتين بملاحظة ان نأخذ عوضا عن قاعدة الاسطوانة مضلعا منتظما مرسوما عليها ذا عدة اضلاع غير متناهية ونعتبر هذا المضلع قاعدة منشور مثل الاسطوانة في الارتفاع فان هذا المنشور يمكن ان يؤخذ بدل الاسطوانة وكذلك يمكن ان نجعل عوضا عن المخروط هرما مرسوما عليه يكون مثله في الارتفاع فاذن الخ

(١٦٨) حجم المخروط الناقص يكافئ ثلاث مخاريط كاملة يكون كل واحد منها مثل المخروط الناقص في الارتفاع وتكون قاعدة احدها قاعدة الناقص السفلى وقاعدة الثاني قاعدته العليا وقاعدة الثالث وسطا متناسبا بين هاتين القاعدتين

ولاجل ادراك صحة هذه الدعوى يكفي ان نتصور هرما ناقصا ثلاثيا يكون مثل المخروط الناقص في الارتفاع وتكون قواعده مكافئة لقواعد هذا المخروط لان حجمي هذين الناقصين يكونان حينئذ متكافئين ومساحة احدهما هي مساحة الآخر فاذن تدخل هذه القضية في نمرة (١٥١)

(١٦٩) حجم الكرة يساوي حاصل ضرب سطحها في ثلث نصف قطرها

البرهان الاول ان يقال اذا تصورنا ان نصف المضلع وهو م ث ط ق ر ص من (شكل ١٣٤) يدور حول القطر اب فان الاضلاع ط ث و ط ق الخ تولد مخاريط ناقصة والضلعين م ث و ر ص يولدان مخروطين كاملين بحيث ان الكل يولد جسما دائريا مرسوما على كرة نصف قطرها اس ولنتوهم ايضا مجموعا من اهرام مرسومة على كل من هذه المخاريط ومجموعا آخر من اهرام

رؤسها المشتركة مركز الكرة وقواعدها عين سطوح الاهرام الاولى فحينئذ جسم الجسم المرسوم على كرة نصف قطرها أ ب الحادث من المجموعين تكون مساحته ب × $\frac{ر}{٣}$ بجعل ب اشارة لسطح هذا الجسم و ر نصف قطر الكرة وحيث انه يمكن تكثير عدة اضلاع المضلع المولد لجسم الدوران وكذلك اهرام كل مجموع بحيث ان حجوم جسم الدوران والجسم المرسوم على الكرة والكرة تختلف بمقدار اقل ما يمكن فالثلاثة مقادير ب × $\frac{ر}{٣}$ والسطح ب × $\frac{ر}{٣}$ و م تكون اذن مقابلة لثلاثة مقادير اخرى هى غ و أ و ب كما فى نمرة (٧٥) فاذن المساحة الصحيحة لحجم الكرة هى

م = السطح ر × $\frac{ر}{٣}$

البرهان الثانى ان يقال اذا فرضنا ان سطح الكرة منقسم الى عدة غير متناهية من مثلثات صغيرة غير متناهية سطوحها قواعد لعدة بقدرها من الاهرام المشتركة الرأس فى مركز الكرة فان حجم كل واحد من هذه الاهرام يساوى سطح قاعدته مضروبا فى ثلث ارتفاعه او فى ثلث نصف قطر الكرة فاذن مجموع حجوم سائر هذه الاهرام او حجم الكرة يساوى حاصل ضرب سطحها فى ثلث نصف قطرها

فاذا اشرنا بالحرف ء للقطر فانه يحصل بمقتضى نمرة (٧٥) السطح ر = ب ء^{٢} وكذلك م = $\frac{١}{٦}$ ب ء^{٣}

وينتج ايضا من هذه الاصول المتقدمة ان حجم القطع الكروى مساحته هى حاصل ضرب المنطقة التى نعتبرها قاعدة له فى ثلث نصف القطر

(١٧٠) كل قطعة كروية ذات قاعدة واحدة فهى مكافئة لاسطوانة نصف قطر قاعدتها ارتفاع هذه القطعة وارتفاعها نصف قطر الكرة الا ثلث الارتفاع المذكور

وحجم القطعة الكروية اء ب كما فى (شكل ١٣٥) هو بالبداهة يساوى حجم القطع او ب ء الكروى ناقصا حجم المخروط ا ب و الذى قاعدته هى قاعدة هذه القطعة

فاذا جعلنا سء = شَ و او = ر فان جم القطع = سطح القطعة الكروية اءس × $\frac{1}{3}$ او = ٢ ب ر ش × $\frac{ر}{3}$ =

$\frac{2}{3}$ ب ر^{2} ش انظر بند (٦٤ و ١٦٩)

وايضا جم المخروط اوس = السطح سا × $\frac{1}{3}$ سو = ب س ا^{2} × $\frac{1}{3}$ سو = ب (٢ر − ش) ش × $\frac{1}{3}$ (ر − ش) = $\frac{ب}{3}$ ش (٢ر − ش) (ر − ش) بمقتضى بند (٥٤ و ٧٥)

فاذن جم القطعة الكروية ذات القاعدة الواحدة = $\frac{2}{3}$ ب ش ر^{2} − $\frac{ب}{3}$ ش (٢ر − ش) (ر − ش) = ب ش^{2} (ر − $\frac{1}{3}$ ش) فهذا هو برهان القضية المذكورة

(١٧١) جم القطعة الكروية ذات القاعدتين المتوازيتين مساحته نصف مجموع هاتين القاعدتين مضروبا فى ارتفاعها زائدا جم الكرة التى يكون هذا الارتفاع قطرها

لكن ءءَ سَ س من (شكل ١٣٦) هو القطعة المطلوب مساحة جمها و م منتصف القوس ءم س و ءو = ر اى نصف قطر الكرة و مه = ش اى ارتفاع القطعة ءم س و مهَ = شَ اى ارتفاع القطعة ءَم سَ و ءه = ض و ءَهَ = ضَ اى نصفى قطرى قاعدتى القطعة الكروية المطلوب مساحتها

فالقطعة ءم س الكروية مساحتها ب ش^{2} (ر − $\frac{1}{3}$ ش) والقطعة ءَم سَ مساحتها ب شَ^{2} (ر − $\frac{1}{3}$ شَ) فاذن جم القطعة ءءَ سَ س الكروية المفروضة هو م = ب ر (ش^{2} − شَ^{2}) − $\frac{1}{3}$ ب (ش^{3} − شَ^{3})

وليكن ط الارتفاع ههَ من هذه القطعة فيكون ط = ش − شَ

ولهذا

ولهذا يصير التعبير السابق هكذا

$$\text{م} = \text{ب}\,\text{ط}\left[\text{ر}\,(\text{ش} + \text{ش}') - \frac{1}{3}(\text{ش}^2 + \text{ش}\,\text{ش}' + \text{ش}'^2)\right]$$

لكن بخاصية الدائرة المذكورة فى بند (٥٤) يكون

$$\text{ض}^2 = 2\,\text{ر}\,\text{ش} - \text{ش}^2 \quad \text{و} \quad \text{ض}'^2 = 2\,\text{ر}\,\text{ش}' - \text{ش}'^2$$

فاذا جمعنا هاتين المعادلتين تحصل

$$\text{ض}^2 + \text{ض}'^2 = 2\,\text{ر}\,(\text{ش} + \text{ش}') - (\text{ش}^2 + \text{ش}'^2)$$

ومنه ينتج

$$\text{ر}\,(\text{ش} + \text{ش}') = \frac{\text{ض}^2 + \text{ض}'^2 + \text{ش}^2 + \text{ش}'^2}{2}$$

فاذا وضعنا هذا المقدار موضع المقدار م يكون

$$\text{م} = \text{ب}\,\text{ط}\left[\frac{\text{ض}^2 + \text{ض}'^2}{2} + \frac{(\text{ش} - \text{ش}')^2}{6}\right]$$

$$= \text{ط}\left(\frac{\text{ب}\,\text{ض}^2 + \text{ب}\,\text{ض}'^2}{2}\right) + \frac{\text{ب}\,\text{ط}^3}{6}$$

وهذا الحاصل موافق لمنطوق القضية

(الفصل التاسع)

فى مقابلة الاجسام المستديرة والاجسام المنتظمة وتشابه الاجسام المستديرة

(١٧٢) الاجسام المستديرة المتشابهة هى التى تكون جميع خطوطها المتناظرة متناسبة فحينئذ الاسطوانات وكذلك المخروطات القائمة تكون متشابهة اذا كانت مستطيلاتها ومثلثاتها القائمة الزوايا المولدة متشابهة فاذن الكرات تكون ضرورة متشابهة ومن هذه المشابهة يلزم ان تكون نسبة سطوح الاجسام المستديرة المتشابهة الى بعضها كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة الى بعضها والنسبة بين حجومها كالنسبة بين مكعبات اضلاعها المتناظرة

وهذه الخواص يبرهن عليها ببراهين مماثلة للبراهين المذكورة فى نمرة (٨١ و ٨٣)

واذا قابلنا الكرة بالاسطوانة المرسومة عليها علمنا اولا ان السطح المحدب من هذه الاسطوانة يكافئ سطح الكرة وثانيا ان نسبة السطح بتمامه من الاسطوانة المرسومة على الكرة الى سطح الكرة كنسبة ٣ : ٢. وهذه النسبة موجودة ايضا بين حجمى هذين الجسمين

وهذا يعلم بالسهولة من البراهين المقررة فى نمرة ١٦١ و ١٦٥ و ١٦٦ و ١٦٩ وبيان ذلك ان يقال اولا حيث كان الارتفاع ف للاسطوانة المرسومة على الكرة = ٢ نق يكون سطحها من غير اشتماله على القاعدتين = ٢ نق ط = ٤ ط نق اى السطح الكروى

وثانيا اذا اضفنا الى هذه المعادلة مقدارى القاعدتين اللتين كل منهما = ط نق^٢

يكون السطح الاسطوانى $= \frac{٦ \text{ ط نق}^٢}{٤ \text{ ط نق}^٢} = \frac{٣}{٢}$

وثالثا ان حجم الاسطوانة يكون ايضا مقسوما على حجم الكرة $= \frac{٢ \text{ ط نق}^٣}{\frac{٤}{٣} \text{ ط نق}^٣} = \frac{٣}{٢}$

(حدود الاجسام المنتظمة)

(١٧٣) قد بقى علينا النظر فى الاجسام المنتظمة التى لها خواص غريبة يعنى الاجسام المنتهية بمضلعات منتظمة متساوية وصانعة زوايا زوجية متساوية لكن لما كانت هذه الخواص غرابتها اكثر من نفعها اقتصرنا على ان ننبه على ان عدة هذه الاجسام لا يمكن ان تتجاوز خمسة وان قواعدها لا يمكن ان تكون الا مثلثات متساوية الاضلاع او مربعات او مخمسات وهذا ناشئ من كون مجموع الزوايا المستوية المركبة لكل من زواياها المجسمة يجب ان يكون اصغر من اربعة زوايا قائمة انظر بند (١٣٦) وهذه هى صورة اسماء

الاجسام

الاجسام المنتظمة

فالجسم المنتظم ذو القواعد الاربعة جميع زواياه مجسمة ثلاثية وسطوحه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع

والجسم المنتظم ذو القواعد الثمانية زواياه مجسمة رباعية وسطوحه الثمانية مثلثات متساوية الاضلاع

والجسم المنتظم ذو العشرين قاعدة جميع زواياه مجسمة خماسية وسطوحه العشرون مثلثات متساوية الاضلاع

والجسم المنتظم ذو القواعد الستة او المكعب زواياه مجسمة ثلاثية وسطوحه الستة مربعات متساوية

والجسم المنتظم ذو الاثنى عشر قاعدة زواياه ايضا مجسمة ثلاثية وسطوحه الاثنا عشر مخمسات منتظمة متساوية

(ذكر جملة مسائل عملية حلها مبنى على جملة من الاصول السابقة)

الاولى اذا كان ارتفاع هرم ثلاثى ١١٫٣ مترا وثلاثة اضلاع قاعدته ٦ امتار و ٧ و ٨ فما يكون مقدار حجمه

الثانية ما مقدار ضلع ذى السطوح الاربعة المنتظم الذى حجمه ١٥ مكعبا

الثالثة اذا كان مقدار ضلع مخروط قائم ٨م وارتفاعه ٥م فما يكون مقدار سطحه المحدب وحجمه

الرابعة اذا كان نصفا قطرى قاعدتى مخروط قائم ناقص ٤م و ٥م وارتفاعه ٦م وكان ضلع هذا المخروط الناقص ٩م فكيف يستخرج مقدار السطح المحدب لهذا الجسم وحجمه

الخامسة اذا كان حجم اسطوانة ٣٦ مترا مكعبا ومحيط قاعدتها ٨م فكيف يستخرج ارتفاعها

السادسة اذا كان حجم كرة ١٣٩ مترا مكعبا فما يكون نصف قطرها

(تنبيه) فى الاصل مقالة ثالثة ليست من المبادى فى شئ اسقطها ناظر مدرسة

الطوبجية اذ ذاك من التعريب وجرى العمل على ذلك تعليما وتعلما فى ذلك الوقت وبهذا صارت المقالة الرابعة فى الاصل ثالثة فى الترجمة وتحولت نمر القضايا والاشكال من الآن فصاعدا ولم يعتبر ما تخلل بين المقالتين

(المقالة الثالثة)

(فى التسويه)

(الفصل الاول)

(فى مباحث نظريه)

(١٧٤) التسويه هى عملية يعرف بها مقدار كون نقطة اقرب من نقطة اخرى الى مركز الارض او ابعد منها وقد تقرر ان الارض التى هى كوكب سيار ليست كاملة التكوير بل بخاصية حركتها على نفسها اليوميه كانت على هيئة ناقصة التكوير وكانت منبسطة جهة القطبين ومنتفخة جهة خط الاستواء ومع ذلك لا مانع فى عمليات التسويه ان يفرض انها كاملة التكوير وان كل نقطتين او عدة نقط تكون على تسوية واحدة اذا كانت فى سطح كروى موازٍ لسطح المياه الراكدة لان من خاصية السوائل التى سطوحها خالية عن الموانع ان تتشكل بشكل كروى اذا لم تكن مضطربة ولكن نظرا لشدة عظم نصف قطر الارض كان سطح المياه المحصورة فى مسافة صغيرة يمكن ان يعتبر انه مستو

وافق المكان هو المستوى المماس لسطح الارض ونقطة التماس هى نفس مكان الراصد وهذا المستوى هو المسمى بالمستوى الافقى

والخط الرأسى هو امتداد نصف قطر كرة الارض عمودا على الافق والاجسام المخلاة لفعل ثقلها تسقط على سمت هذا الخط

والخط الافقى هو الخط الذى يكون عمودا على الخط الرأسى فاذن هو دائما موضوع على افق المحل او موازٍ له

(١٧٥) ويتوصل مباشرة الى معرفة فروق تسوية عدة اماكن بواسطة

خطوط

خطوط افقية ينسب اليها ارتفاعات هذه الاماكن وانخفاضاتها وهذه الخطوط تكون معينة باعمدة على شاقول او بخطوط شعاعية بصرية مارجميعها بسطح سائل فى اسطوانة جزؤمنها افقى وجزآن رأسيان مفتوحا الطرفين او بخط موازلمحور انبوبة اسطوانية من زجاج اعظم جزؤمنها مملوء ماء صافيا والجزء الباقى مملوء هواء وتكون موضوعة بحيث ان الهواء الذى ثقله الخاص اقل من ثقل هذا المائع (والذى بهذا السبب يقصد دائما ان يشغل اعلا نقطة من هذه الانبوبة) يكون شاغلا وسطها بالتحرير ومن هذا كانت الآلات تسمى ميزانا ذا شاقول وميزانا مائيا وميزانا هوائيا

الشعاع البصرى اب الافقى كما فى (شكل ١٦٥) يسمى خط التسوية المرئية او الظاهرية وكل خط منحن مرسوم على سطح الارض يسمى خط التسوية الحقيقية مثال ذلك القوس اد الارضى

(١٧٦) الجزؤ الخارج بد من القطر بش هو الذى يسمى فرق التسوية اب الظاهرية عن التسوية اد الحقيقية ومن اللازم فى عملية التسوية تعيين مقدار هذا الارتفاع اذا عرف طول المماس اب ويتوصل الى ذلك بالسهولة لانه بمقتضى تند (٥٦) يكون

$$\text{بش} : \text{اب} :: \text{اب} : \text{بد} = \frac{\overline{\text{اب}}^{2}}{\text{بش}} = \frac{\overline{\text{اب}}^{2}}{2\,\text{سد} + \text{بد}}$$

ومنه ينتج $\text{بد} + 2\,\text{سد} \times \text{بد} = \overline{\text{اب}}^{2}$

ولاجل معرفة المقدار بد بالتدقيق يلزم حل معادلة بدرجة ثانية لكن هذا الارتفاع دائما صغير جدا بالنسبة للقطر ٢ سد الارضى بحيث ان المعادلة السابقة يمكن ان ترجع من غير خطا بين الى $\text{بد} = \frac{\overline{\text{اب}}^{2}}{2\,\text{سد}}$

اوالى $\text{بد} = \frac{\text{ا}^{2}}{2\,\text{ر}}$ بالاختصار

وكذلك لاجل مسافة اخرى وهى $\text{اب}' = \text{ا}'$ يكون $\text{ب}'\text{د}'$ او $\text{ش}'$

$$= \frac{\text{ا}'^{2}}{2\,\text{ر}}$$

ومنه ينتج ان نسبة ارتفاعات التسوية الظاهرية الى التسوية الحقيقية هى تقريبا كنسبة مربعات المماسات المتقابلة بل وكالاقواس التى تنسب اليها هذه المماسات

فاذا علمنا ان نصف القطر وهو س ر = ر = ٦٣٦٦١٩٨ او ان لوغاريتمة ٢ ر = ٧٫١٠٤٩١٠١ وعلمنا ان المسافة اـ = ا سهل علينا معرفة مقدار ارتفاع شـ المطلوب فلنبحث بمقتضى الاصول السابقة عن ارتفاعات التسوية الظاهرية عن التسوية الحقيقية فى المسافتين ٤٥٠ و ١٠٠٠ متر

فالارتفاع المقابل لبعد المسافة ٤٥٠ مترا يكون معبرا عنه بهذه المعادلة

شـ = ا²/٢ر = ٤٥٠²/٢ر ويوجد بواسطة اجراء العمل باللوغاريتمات ان

شـ = ٠٫٠١٦ م

فيكون بعد ذلك ارتفاع شَـ المقابل للمسافة اَ = ١٠٠٠ متر بواسطة متناسبة هى

ا² : اَ² :: شـ : شَـ

ومقاديرها العددية

(٤٥٠)² : (١٠٠٠)² :: (٠٫٠١٦ م) : شَـ

فحينئذ شَـ = ٠٫٠٧٨٥ م فاذا لزم عمل حسابات اخرى من هذا النوع فالاسهل ان تقابل بهذا الارتفاع الاخير جميع الارتفاعات المطلوب تعيينها لان القسمة تسهل بتغيير موضع علامة الاعشارى بما يليق كما هو واضح وايضا لاجل اختبار كل حساب فى هذا المعنى نذكر هنا جدولا صغيرا مشتملا على ارتفاعات التسوية الظاهرية عن التسوية الحقيقية يمكن ان يستغنى به فى كثير من الصور وهو هذا

مسافات

مسافات بالمتر	ارتفاعات التسوية الظاهرية عن التسوية الحقيقية	مسافات بالمتر	ارتفاعات التسوية الظاهرية عن التسوية الحقيقية
متر	متر	متر	متر
٠٥٠	٠٫٠٠٠٣	٥٥٠	٠٫٠٢٣٧
١٠٠	٠٫٠٠٠٨	٦٠٠	٠٫٠٢٨٣
١٥٠	٠٫٠٠١٧	٦٥٠	٠٫٠٣٣٢
٢٠٠	٠٫٠٠٣١	٧٠٠	٠٫٠٣٨٥
٢٥٠	٠٫٠٠٤٩	٧٥٠	٠٫٠٤٤٢
٣٠٠	٠٫٠٠٧١	٨٠٠	٠٫٠٥٠٣
٣٥٠	٠٫٠٠٩٦	٨٥٠	٠٫٠٥٦٧
٤٠٠	٠٫٠١٢٦	٩٠٠	٠٫٠٦٣٦
٤٥٠	٠٫٠١٥٩	٩٥٠	٠٫٠٧٠٩
٥٠٠	٠٫٠١٩٦	١٠٠٠	٠٫٠٧٨٥

(١٧٧) نقطة المرأى المسماة ايضا نقطة الغرض هى احدى النقط المرئية من جسم يتوجه اليها خط شعاعى بصرى وعلى بعد غير بين الكبر تظهر نقطة المرأى فى محل غير محلها الحقيقى وهذا يحدث عن انكسار الاشعة وهو يظهر الاشياء عادة اعلى من ارتفاعها الحقيقى ويزداد ذلك الانكسار كلما قرب المراى من افق الراصد ويكون فى افق الراصد بقدر ١٦/١٠٠ تقريبا من فرق التسوية الظاهرية عن التسوية الحقيقية ولاجل قطع النظر عن ذلك الانكسار نضع الآلة على بعد واحد تقريبا من النقطتين المتباعدتين اللتين يبحث عن فرق

التسوية بينهما وبهذا الوضع ينعدم فرق التسوية الظاهرية عن التسوية الحقيقية مثلا اذا كان وو خط التسوية الظاهرية الحادث من وضع الآلة في ا كما في (شكل ١٣٨) وكان او=او (حيث ان الخط واو يمكن ان يكون منكسرا بالارادة في ا.) فان النقطتين المرئيتين و و وَ من الغرضين د و دَ يكونان بالضرورة على بعد واحد من مركز الارض وهو م ويكونان على افق واحد لان انكسار الاشعة في د وفرق التسوية الظاهرية عن التسوية الحقيقية في هذه النقطة يكونان على الناظر مثلهما في دَ وينتج من ذلك وبسبب ان ود = ودَ ان الفرق بين النقطتين ب و بَ هو في الغالب عبارة عن وبَ ـ وب = دبَ ـ دب فاذا كان دب = دبَ فان النقطتين بَ و ب يكونان على تسوية واحدة بخلاف ما اذا كان دبَ اكبر او اصغر من دب فان النقطة الاولى وهي بَ تكون اخفض او ارفع من الثانية وهي ب وهذا واضح

(الفصل الثاني)

(في تطبيق الدعاوى النظرية السابقة)

(ميزان المياه)

(١٧٨) اسهل جميع الموازين وهو المقصود لنا هنا دون غيره هو ميزان الماء وهو مكون من انبوبة اسطوانية جزء منها افقي والجزآن وهما طرفاها رأسيان مفتوحان موضوع فيهما جامان ف و فَ كما في (شكل ١٣٩) وهذه الانبوبة محمولة مثل آلة الغرافومتر (وهي آلة اخذ صورة الشئ وقياس الزوايا) على ركبة مثل ركبة البلنشيطة ممسكة بجلبة كروية محمولة على

ثلاث

ثلاث شعب ويلزم ان يكون طولها نحو متر وبواسطة هذا التركيب يسهل تحريك الآلة ورفعها وخفضها وتدويرها كيفما اريد واغلب موازين هذا النوع مصطنعة من الصفيح ومحررة على الوجه المرسوم فى (شكل ١٣٩) ولكن اقواها وانفعها يكون من النحاس

ومتى اريد استعمال هذه الآلة لزم صب الماء فى احدى الجامين فانه يصل حالا الى الجام الآخر ويوضع مقدار كاف لملء الجامين تقريبا الى الثلثين فحينئذ متى كان سطحا الماء ليسا مضطربين فانهما يكونان على افق واحد بمقتضى خاصية السوائل التى تكون دائما على هذا الوضع اذا خلت من الموانع ولكن بشرط ان لا يكون شئ من الهواء ساكنا فى داخل الجزء الافقى لان الطرفين المتوازيين ليس لهما حينئذ ثقل واحد ولاجل اخراج الهواء يسد احد الجامين وتمال الآلة امالة خفيفة بحيث تكون قريبة من العمودية فحينئذ جميع الهواء الذى فيها يصعد ويخرج من الجام الآخر

فاذا نقلنا الميزان من وضع الى وضع آخر سددنا احد الجامين واملناهذه الآلة حتى لا يمكن انصباب الماء وعند وضعها يفتح الجام المسدود شيأ فشيأ ليأخذ الماء على التدريج تسويته ثانيا وكذلك اذا سددنا زمنا بعد زمن احد الجامين بالاصبع توصلنا الى تنقيص حركة العمود المائى المسببة عن تحريك الآلة عند توجيهها الى نقطة المرءى

ويلزم ان يحذر مدة الرصد من خروج الماء من مابين القطع المركبة للميزان ويلزم مدة الحر الشديد او الامطار ان تكون مدة العمل يسيرة فى كل وضع حتى لا يكون للماء زمن يكفى فى تصعده او زدياة حجمه وفى العادة يلونون الماء ليكون اشد ظهورا

(المرءى)

(١٧٩) استعمال الميزان يستدعى استعمال المرءى المسمى بالغرض او الهدف وهو قطعة من مقوى او لوح من الصفيح سعتها نحو ثلاثة ديسمترات

مربعة ومنقسمة الى قسمين متساويين بالخط م ى الافقى ويلزم ان يكون لون احد هذين القسمين مخالفا للون الآخر وتثبت هذه القطعة فى طرف مسطرة على وجه ان م ى كما فى (شكل ١٣٩) يكون عمودا على عرض هذه المسطرة ومن اللازم ان المسطرة تدخل بالتعشق فى مسطرة اخرى طولها ضعف المتر مرة اومرتين يعنى مترين اواربعة امتار وكل ينقسم الى اعشار واعشار الاعشار واعشار اعشار الاعشار وهذه الآلة تسمى بالقامة فيرفع ويخفض الغرض م ى على هذه القامة حتى يصير بالضبط فى أفق الميزان

(التسوية البسيطة)

(١٨٠) ايجاد فرق تسوية نقطتين بوضع واحد للميزان فان هذه العملية هو التسوية البسيطة والقضيتان العمليتان الآتيتان هما من هذه الصورة

(١٨١) كيف يمكن ايجاد فرق تسوية النقطتين ا و ب كما فى (شكل ١٤٠) اللتين يمكن الوصول اليهما

ضع الميزان س ط على بعد واحد تقريبا من النقطتين ا و ب ومر بوضع القامة فى النقطة ا وضعا رأسيا ثم باشارة اصطلاحية يرفع او يخفض الغرض حتى ان الخط س اَ يمر بمستوى مياه الميزان واذا شوهد على القامة ام مقدار البعد ا اَ فانه يكتب على مسودة عمل التسوية ومن غير نقل الآلة عن محلها وضياع الزمن مر بنقل القامة الى النقطة ب واجر العمل الذى اجريته بعينه فى النقطة ا لاجل تحصيل مقدار البعد ب بَ واكتبه ايضا على المسودة لترجع اليه عند الحاجة

ليكن مثلا ا اَ = ١٫٥٣٦م و ب بَ = ٠٫٩٥م فيلاحظ

من

من هذين الارتفاعين المختلفين ان النقطتين ا و ب ليستا على تسوية واحدة بل النقطة ا اخفض من النقطة ب بقدر اأ — بَ = ١٫٥٣٦م — ٠٫٩٥٠م = ٠٫٥٨٦م وبالجملة فاخفض النقط بالبداهة النقطة ذات الارتفاع الاكبر بالنسبة لافق الميزان

ولاجل رؤية سطوح المياه على وجه تام يلزم ان يكون الراصد قريبا من احد الجامين ويكون النظر بين واحدة بحيث ان الخط الشعاعى البصرى يكون مماسا لمستوى ماء الجامين .

ولا يخفى ان المهندسين يسمون ايضا الارتفاع اأ الاول بالمؤخر والارتفاع ب بَ الثانى بالمقدم

(اخذ صورة قطع ارض)

(١٨٢) اذا كانت الارض مختلفة بين النقطتين ا و ب كما فى (شكل ١٤١) وكانت معرفة صورتها لازمة كما اذا كان القصد اخذ صورة قطع بناء او استحكامات فانه يؤمر بوضع القامة على التوالى فى النقط ا و ح و ء و ه و ب لاجل تحصيل ارتفاعاتها ثم يقاس الارتفاع ط و من الآلة المفروضة عند وضعها على المستقيم اب فى منتصفه تقريبا ثم يختم بقياس الابعاد اح و حء و ءط و طه و هب الافقية

والعادة ان يجعل هذه الابعاد متساوية اذا كان فى الاراضى ميول يسيرة الانحدار

فمتى تم اخذ صورة القطع فانه يرسم بالمقياس المستعمل المتفق عليه لكن متى كانت الارتفاعات صغيرة بالنسبة للابعاد الافقية وجب ان يزاد فى كل واحد منها مقدار واحد لتكون المسافة التى بين الخط أبَ الافقى والخط ا ح ء ط ه ب الذى هو عبارة عن قطع الارض كافية لان نكتب على

الارتفاعات مقاديرها او يرسم الارتفاعات بمقياس اكبر من المقياس الذى رسمت به الابعاد الافقية لاجل كتابة مقادير الارتفاعات عليها وقد جرت العادة انهم يأخذون هذا المقياس الاخير مكررا بقدر مقياس الابعاد الافقية

(التسوية المركبة)

اذا كانت النقطتان المطلوب ايجاد فرق تسويتهما موضوعتين على بعد اكبر من امتداد خط البصر الشعاعى او كانت قطعة الارض كثيرة الارتفاعات والانخفاضات او كانت ذات انحدار عظيم فلاجل ايجاد فرق التسوية بين هاتين النقطتين تعمل تسويات بسيطة بينهما وهذا ما يسمى بالتسوية المركبة فليكن اـ ـسـ ـ ـ ـ ف ح من (شكل ١٤٢) قطع الارض الكائن بين النقطتين ا و ح المفروض ان احداهما بعيدة عن الاخرى بحيث لا يمكن ايجاد فرق التسوية بينهما الا بعدة اوضاع مثل ١ و ٢ و ٣ الخ ففى هذه التسوية المركبة تكون كل تسوية بسيطة مرتبطة بالتسوية التى قبلها بمؤخر التالية الموجود فى مقدم الاولى كما يشاهد بالتأمل فى الشكل وهذه الطريقة فى العمل يتضح بها فرق التسوية بين جميع النقط ا و ـ و ـ و ى و ـ و ف و ح

فاذا لم يمكن وضع الآلة بين طرفى كل عملية جزئية مثلا واحتجنا لوضعها فى ـ لاجراء التسوية فى ـ ـ الثانية الجزئية فاننا نجعل الارتفاع المؤخر فيها ـ ـ مساويا لارتفاع الآلة

فاذا كان الغرض معرفة فرق التسوية بين الطرفين ا و ح فانك توجه باسهل الطرق الخط اـ ـ ـ ـ ف ح الذى قد يكون فى مستو واحد رأسى وقد لا يكون والارتفاعات اا و ـ ـ و ـ ـ الخ الرأسية هى التى يلزم معرفتها فقط لكن اذا كان اتجاه خط العملية اقتضته طبيعة عدة اشغال مرتبة لزم قياس جميع الابعاد اـ و ـ ـ الخ وكذلك

الزوايا

الزوايا الواقعة بينها والعادة ان يبتدئ باخذ صورة قطعة الارض المطلوب اجراء العمل بها ويعلم بشواخص على سطح تلك القطعة اتجاه الخط ا ب ى د الخ كما اذا كان الغرض عمل خليج للسفر فيه او تحويل مجرى مياه غدير حول قلعة فانه يلزم رسم صورتها رسما صحيحا

ولنذكر الآن اسهل الطرق لتحصيل فرق تسوية النقطتين اذا علمت على مسودة التسويه جميع مقادير المقدمات والمؤخرات فمن مجموع مقادير المؤخرات يطرح مجموع مقادير المقدمات والباقى هو المقدار الذى يوجد به الطرف الثانى ح اعلا او اسفل من الطرف الاول ا على حسب كون مجموع مقادير المؤخرات اكبر او اصغر من مجموع مقادير المقدمات فاذا لم يبق شئ فان النقطتين ا و ح يكونان على تسوية واحدة ففى صورة الشكل المذكور مثلا تكون

مقادير المؤخرات	ومقادير المقدمات
م ٢٫١٢٦	م ١٫٩٤٨
٢٫٣٦٠	٢٫٤٤٥
١٫٥٨٨	٠٫٠٠٠
٢٫٣٦٧	٠٫٨٦٨
١٫٥٤٤	١٫١٠٠
٠٫٣٥٤	٠٫٧٨٥
مجموعها = م ١٠٫٣٣٩	مجموعها = م ٧٫١٤٦

فحينئذ النقطة ح تكون اعلى من النقطة ا بقدر م ١٠٫٣٣٩ — م ٧٫١٤٦ = م ٣٫١٩٣

وبرهان هذه القاعدة سهل الفهم لانا اذا فرضنا ان ا و ب مقدار المؤخر

والمقدم فى الوضع الاول وان اَ و بَ مقدارا المؤخر والمقدم فى الوضع الثانى وهلم جرا يكون ا − ب فرق تسوية ب عن ا وفرق تسوية بَ عن ب يكون بَ − اَ وهلم جرا

فاذن يكون فرق تسوية ى عن ا هو

$$\text{فرق التسوية} = (\text{ا} - \text{ب}) + (\text{ا}' - \text{ب}') + (\text{ا}'' - \text{ب}'') + (\text{ا}''' - \text{ب}''') + (\text{ا}'''' - \text{ب}'''') + (\text{ا}''''' - \text{ب}''''') = (\text{ا} + \text{ا}' + \text{ا}'' + \text{ا}''' + \text{ا}'''' + \text{ا}''''') - (\text{ب} + \text{ب}' + \text{ب}'' + \text{ب}''' + \text{ب}'''' + \text{ب}''''')$$

وهذا الحاصل يثبت القاعدة المذكورة

ولاجل عمل مبيضة التسوية تنسب جميع نقط الارض لخط واحدافقى غ غَ يوجد فوق النقطة العليا ولاجل هذا العمل تزاد جميع الارتفاعات بحسب اللائق وهذا لاصعوبة فيه اصلا

وتحقيق التسوية يكون باعادة جميع الاعمال ثانيا بالابتداء من النقطة ى الى النقطة ا والعمل بهذه الطريقة هو التسوية المنعكسة وهذه التسوية توصل الى حاصل نظير حاصل التسوية الابتدائية لكن اذا كان الحاصلان لايتخالفان الا بمقدار صغير جدا فانه يؤخذ متوسط مجموعهما اذا لم يكن هناك سبب يحملنا على اختيار استعمال احدهما دون الآخر

(الرسم بالبلنشيطة)

(١٨٣) هذه الآلة التى هى احدى الآلات النافعة فى اخذ صورة قطعة من الارض فى اقرب زمن هى كناية عن لوح اى تختة مربعة مركبة على ركبة

مجمولة

محمولة على سيبة ذات ثلاثة ارجل وهذه التختة يمكن تحريكها بسهولة الى اى جهة كانت وينبغى ان تكون هذه الركبة ايضا مصنوعة بكيفية بها تحدث فى التختة حركة رحوية بطيئة خفيفة ولكن بشرط ان لاتغير هذه الحركة الوضع الافقى الذى هو لازم مادام الراصد مشتغلا بالتحرير على الشواخص ويوجد احيانا فى الطرفين المتقابلين من التختة اسطوانتان ذاتا محورين ببرمتين مركب على كل محور ترس مسنن من احد طرفيه ووظيفة هاتين الاسطوانتين نشر الورقة التى ترسم عليها العمليات وطيها على حسب الحاجة ويجعل وضع البلنشيطة افقيا بواسطة ميزان تسوية هوائى اوذى شاقول انظر بند (۱۷٥) لكن من اعتاد على ذلك ولو يسيرا يقوم نظره مقام احدى هاتين الآلتين ولما كانت البلنشيطة لوحا صغيرا استعملوا معها التعيين المحال عضادة من نحاس ذات شظيتين اوذات نظارة متحركة واحدى حافتى مسطرة هذه العضادة تعين على الورقة الموضوعة على البلنشيطة اتجاه الاشعة البصرية الخارجة من نقطة مكان الراصد الى الاشياء التى حولها

(۱۸٤) والغالب فى اخذ صورة تفاصيل الاماكن طريقتان الاولى ان تحدد المسافة التى يراد اخذ صورتها بمضلع ذى اضلاع اقل ما يمكن فاذا كانت المسافة عظيمة فانها تقسم الى مضلعات اى مثلثات جزئية ثم تقاس الزوايا والاضلاع قياسا مضبوطا ثم تنزل اعمدة صغيرة من جميع انعطافات الارض على تلك الاضلاع المعتبرة قواعد كما يشاهد فى (شكل ۱٤۳) ثم ترسم جميع الاشياء الداخلة فى هذه المضلعات

فاذا كانت المسافة غابة كثيفة الاشجار بحيث لايمكن الدخول فيها جعلت كلها داخل المضلع بخلاف ما اذا كانت المسافة جزيرة اوساحة تحيط بها غابات اوبرك فان خطوط العمل ترسم فى داخلها

والطريقة الثانية ولاتستعمل عادة الا اذا كان لايمكن الوصول الا من ضلع

واحداى قاعدة واحدة تكون برسم جميع الزوايا الواقعة بين هذه القاعدة والاشعة البصرية المتوجهة من نهايتيها الى جميع النقط الممكنة الرؤية الموجودة على يمينها وشمالها لكن لايخفى انه لابد من اجتناب الزوايا الحادة جدا او المنفرجة كذلك لان وضع النقطة المجعولة فى ملتقى الخطين يتضح كلما كان تقاطع الخطين واضحا

واستعمال هذه الطريقة يستدعى كون محيط الارض المراد رسمها مركبا من مجموع خطوط مستقيمة لان هذا المحيط اذا كان منحنيا وذا انعطاف لايمكن فى الغالب ان نعين منه الا عدة نقط قليلة فيلزم فى هذه الحالة ان ترسم بمجرد النظر الاجزاء التى لم يمكن تحديدها بالآلة

(العمل بالطريقة الاولى)

(١٨٥) لنفرض كمافى (شكل ١٤٣) ان النقطتين ا و ش اللتين هما نهايتا احد اضلاع المثلثات المصنوعة على قطعة الارض المطلوب اخذ صورتها مرسومان على البلنشيطة وان الغرض هو اخذ صورة الاستدارة ا ب س د ى الخ التى يمكن التوصل اليها وكذلك تحديد جهاتها بالنسبة للقاعدة ا ش

فتوضع البلنشيطة وضعا افقيا فى النقطة ا من الارض على وجه ان ا من البلنشيطه تقابل ا من الارض تقابلا رأسيا ويتوصل الى هذا بالسهولة بواسطة تحريك الآلة تحريكا خفيفا وبعد هذا الوضع توضع المسطرة على البلنشيطة مطبقا خط حافتها على المستقيم ا ش المرسوم على الورق وتدار تختة البلنشيطة على مركزها حتى يكون محور النظارة او شظيتا العضادة على استقامة القاعدة ا ش فحينئذ يكون وضع البلنشيطة موافقا للمطلوب فتثبت على هذا الوضع ثم بعد ذلك تغرس ابرة قائمة فى النقطة ا وترسم على الورق الزاوية ب ا ش بتدوير المسطرة بلطف حول هذه الابرة الى ان يشاهد محور النظارة او شعاع الشظيتين على استقامة الشاخص ب اوغيره من الشواخص الموضوعة على الخط ا ب

ثم يرسم بقلم الرصاص خط غير متناه على طول المسطرة من جانب الابرة فيوجد على الورق الخط اب قد احدث مع اش زاوية ب اش = ب اش الارضية لكن يشترط بعد هذا العمل الثانى ان يكون الخط اش البلنشيطى منطبقا على اش الارضى ولابد من امتحان صحة ذلك بتكرير وضع المسطرة كما كانت اولا

ثم قبل ترك الوضع ا يقاس البعد اب الارضى ويؤخذ على الورق من مقياس الرسم عدة الامتار المتحصلة وينقل البعد المتحصل بهذا الوجه من ا الى ب وتقاس ايضا اجزاء خط اب وكذلك الاعمدة الصغيرة النازلة من نقط المنحنى اغ ضه ظب على ذلك الخط وتنقل هذه الاعمدة على الورق كما نقل الخط اب بتمامه فاذا صح العمل لزم ان مجموع الابعاد اغ و غ ضه الخ الجزئية يكون مساويا للخط اب بتمامه واذا كان المنحنى اغ ضه ظب كثير الانعطاف والاعوجاج لزم ان يزاد بقدر ما يمكن فى عدد الاعمدة خغ و ضه ضه الخ ويسهل فى هذه الصورة ان تجعل متساوية الابعاد عن بعضها ولاجل رسم الاعمدة تستعمل البوصلة او الزاوية القائمة المسماة عند المهندسين بمثلث المساح كما فى النمرة الآتية وايضا اذا كانت الاعمدة قصيرة جدا فانه يمكن بمجرد النظر معرفتها لكن متى كانت النقطتان غ و ضه متباعدتين عن بعضهما فانه يمكن تحديدهما بالبلنشيطة بالطريقة الثانية بجعل اب قاعدة

فاذا ترك الوضع ا غرس فيه شاخص ثم وضع البلنشيطة وضعا افقيا فى النقطة ب مع الاهتمام بعد رفع الشاخص ب بمقابلة النقطة ب البلنشيطية للنقطة ب الارضية تقابلا رأسيا ويجعل وضعها الجديد موازيا للوضع الاول وكيفية ذلك ان توضع كما تقدم حافة المسطرة على الخط اب ثم تدار البلنشيطة حتى يكون محور شعاع الشظيتين او النظارة مارا بالشاخص ا ففى هذه الحالة يصير وضع البلنشيطة موازيا للوضع الاول ثم ترسم الزاوية

اـحـ على الورق بتدوير المسطرة حول الابرة ـ الى ان يمر الشعاع البصرى المار بمحور النظارة بالشاخص س فيحصل على الورق مقدار ـحـ يقابل ب س الارضى فبالنتيجة تكون الزاوية اـحـ البلنشيطية مساوية اب س الارضية

ومن المهم جدا ان تمتحن هذه الاعمال فى كل وضع من غير تحويل البلنشيطة عن محلها بوضع حافة المسطرة على الخط ـشـ فاذا لم يحصل غلط فى قياس اب اوفى اتجاه الآلة لزم ان يكون المحور الشعاعى من النظارة او من الشظيتين مارا بالنقطة ش الارضية فى صورة ما اذا كانت هذه النقطة غير مرئية يوجه الشعاع البصرى الى نقطة اخرى معروفة ومرسومة قبل ذلك على الورق ويدام اجراء هذه الطريقة فى اخذ رسم باقى محيط الشكل اب س الخ والدليل على صحة جميع هذه الاعمال انك اذا وضعت البلنشيطة فى ى ووجهتها بحيث يكون وضعها موازيا للاوضاع السابقة ثم جعلت حافة المسطرة على الخطوط ىا و ىب و ىس الخ على التوالى وجدت الخطوط الشعاعية البصرية منطبقة بالتحرير على الخطوط ى ا و ى ب و ى س الخ

(١٨٦) قد بينا ان قياس جميع اضلاع المضلع لابد منه فى صحة رسم المحيط اغ ضـ ظـ ب لكن اذا كان الخطان اب و ب س حدين من حدود قطعة الارض وامكن من غير ضرر التساهل فى التحرير كفى قياس قاعدة واحدة

وبيان ذلك اننا اذا حددنا من جهة طول الخط اب ومن جهة اخرى الزاوية اب س = اـحـ وانتقلنا بعد ذلك الى النقطة حـ لزم ان نجعل الخط ـحـ البلنشيطى مقابلا للنظير ب س الارضى لاجل توجيه البلنشيطة توجيها اتفاقيا وبعد ان نضع ابرة فى النقطة ا نحرك حولها المسطرة حتى يمر الخط الشعاعى بالشاخص ا فالخط المرسوم فى جانب المسطرة يقطع المستقيم ـحـ غير المتناهى فى النقطة حـ التى تصير

مقابلة

مقابلة للوضع س

فالآن لاجل تحديد النقطة د نجعل اولا النقطة سـ مقابلة للنقطة التي كان فيها الشاخص س تقابلا رأسيا وننظر هل توجه البلنشيطة صحيح ام لا ثم نبحث بالمسطرة عن اتجاه الخط سـء موجهين نظرنا الى د وبعد ان ننتقل الى النقطة د ونوجه فيها الآلة ندير كما تقدم المسطرة حول النقطة ا حتى يمر الشعاع البصري بالنقطة ا فان حافة المسطرة تقطع الخط سـء في النقطة ء التي هي المطلوب وهلم جرا

وقد فرضنا فيما تقدم انه يلزم ربط التفاصيل بالنقط الاصلية قبل ذلك بعمل مثلثات منقولة على الورق لكن اذا لم يكن الغرض الارسم قطعة ارض صغيرة مستقلة امكن اخذ اول نقطة مثل ا كما يراد على البلنشيطة واذا كان الغرض تحديد جهة الرسم بالنسبة لخط نصف النهار الارضي نستعمل آلة الانحراف كما سياتي

(آلة الانحراف)

(١٨٧) من المعلوم ان الابرة المغناطيسية اذا وضعت افقية يهتدي احد طرفيها جهة القطب الشمالي وان انحراف هذه الابرة عن هذا القطب في مدينة باريس الى جهة الغرب يساوي ½ ٢٢° تقريبا بمقتضى تقسيم الدائرة الى ٣٦٠° وهذه الابرة مظروفة في علبة في قاعدتها من داخل خط يسمى خط الشمال الجنوبي موازلاحد طرفي الابرة وهذه الآلة هي المسماة بالآلة الانحرافية لانها تستعمل لمعرفة زاوية الانحراف التي تحدث من خط مرسوم على الارض ومن خط نصف النهار المغناطيسي

فلنفرض مثلا انه يلزم ان نرسم على لوح الرسم اتجاه خط نصف النهار الارضي فنحرر اولا البلنشيطة كما تقدم يعني اننا نجعل الخط اب من الرسم مقابلا للخط اب الارضي كما في (الشكل ١٤٣) ثم نضع الآلة الانحرافية على البلنشيطة بعد تثبيتها ثم نديرها الى ان يقع طرفا الابرة المغناطيسية على خط الشمال الجنوبي فاذا حصل هذا التطابق رسمنا بقلم الرصاص خطا على امتداد اكبر

اضلاع الآلة الانحرافية فيصير هذا الخط موازيا للابرة اولخط نصف النهار المغناطيسى ثم بعد ذلك لاجل تعيين خط نصف النهار الارضى الحقيقى لا يلزم الارسم خط جديد يحدث مع الخط الاول زاوية مساوية لانحراف الابرة لكن اذا لم يكن القصد الا جعل اوضاع البلنشيطة متوازية فاننا نجد فى اى نقطة من الرسم الذى نحدثه انه يلزم تدوير البلنشيطة حتى تستر الابرة خط الشمال الجنوبى المفروض اولا موازيا للخط المرسوم على الخرطة الذى هو عبارة عن خط نصف النهار المغناطيسى واذا دققنا وجدنا هذا التوازى لايكون تاما ابدا الا بالجزء لكون انحراف الابرة المغناطيسية يتغير غالبا من مكان الى اخر ولا لكونه قد يتغير فى عدة ساعات مختلفة فى مكان واحد بل لعلة اخرى ايضا وهى ان دوائر خطوط انصاف النهار المغناطيسية هى خطوط مجتمعة جهة القطب وتشابه المواد الحديدية بعضها هو ايضا احد الاسباب التى توجب انحراف الابرة فالاحسن حينئذ تحرير البلنشيطة بالاوضاع المختلفة كما ذكرناه فيما سبق وان كان تحريرها بالآلة الانحرافية فيه سرعة لاخذ الرسم

(العمل بالطريقة الثانية)

(١٨٨) لامعنى لكثرة التوضيح فيما يتعلق بطريقة تعيين نقط رسم التقاطعات لان هذه الطريقة لاتكاد تختلف فى شئ عن الطريقة المستعملة فى عمل المثلثات فاذن نقتصر على ان ننبه على انه اذا كان لايمكن الاقياس القاعدة اى كما فى (شكل ١٤٤) وكان من اللازم اخذ رسم النقط ب س ف د الخ التى حولها يضع الانسان البلنشيطة فى النقطة ا وضعا افقيا ويرسم على الورق الذى يستر الآلة الخط اے ويعطى له اجزاء من مقياس بقدر مافى اى من الامتار ويجعل النقطة ا بذلك الخط مقابلين على الناظر للوضع ا والقاعدة اى ويوجه العضادة على التوالى حول ا على اشياء مختلفة مثل ب و س و ف الخ لتحصيل الاشعة اے و اس و اف الخ ثم بعد ذلك ينتقل الى النقطة ى

ليعمل

ليعمل فيها كالاعمال التى صنعها فى النقطة ا يعنى انه يحدد الاشعة ى ب و ى س و ى ف التى بتقاطعها مع الاولى تتم تحديد النقط ب و س و ف فحينئذ الصورة اب س ف تكون مشابهة للصورة الارضية اب س ف والاولى ان يقال ان اب س ف هو مختصر مسقط الشكل الارضى اب س ف واما النقطة د التى تكاد توجد فى الاتجاه اى فانها تحدد ايضا بالتقاطع لكن بجعل ى س قاعدة

ويسهل بهذه الطريقة عمل صورة الرسم وتصوير جميع تفاصيلها بدون عمل جملة من المثلثات لكن من الضرر البين ان يوثق بالكلية بالبلنشيطة لان ضبطها لا يمكن ان يساوى فى صورة من الصور ضبط الآلات المستعملة فى تعيين النقط الاصلية من خرطة

(١٨٩) احدى الاعمال المهمة التى تقع غالبا فى اخذ صورة التفاصيل هى ان يحدد على الرسم وضع اى نقطة ترادمن الارض بشرط ان تنظر من هذه النقطة جميع الاشياء التى يكون وضعها معلوما على الرسم

وطريقة عمل ذلك بالبلنشيطة ان تفرض كما فى (شكل ١٤٥) ثلاث نقط ا و ب و س معلومة على الرسم الذى على البلنشيطة والمطلوب تعيين وضع النقطة ى على الرسم المذكور ثم تارة يكون المشاهد ثلاث نقط او اثنان

ففى الحالة الاولى يلصق على البلنشيطة ورقة شفافة على الجزء المشتمل على النقطة ى المقابلة للنقطة د الارضية وتدار العضادة لتوضع على التوالى فى اتجاهات الثلاث نقط ا و ب و س ونظائرها على البلنشيطة فالمستقيمات ىا و ىب و ىس المرسومة على الورق الشفاف تحدث بعضها مع بعض نظائر الزوايا التى تحدثها المستقيمات دا و دب و دس الارضية فاذا تم ذلك تنزع هذه الورقة وتوضع على الرسم بحيث لا تنكمش وتكون المستقيمات ىا و ىب و ىس مارة على التناظر بالنقط ا و ب و س المجعولة على هذا الرسم فاذا حصل ذلك فان النقطة ى

يكون وضعها بالنسبة للنقط الاخرى ا و ب و س كنسبة نقطة د الارضية الى ا و ب و س الارضية فحينئذ تتعين النقطة د على الرسم المطلوب

فاذا لم يكن هنالك ورق شفاف فارسم على اب و ب س المفروضين قوسى الدائرتين وهما ادب و بدس اللذان يمكن ان يرسم عليهما الزاويتان ادب و بدس المرصودتان انظر بند (٩٦) وهذان القوسان يتقاطعان فى النقطة د التى هى النقطة المطلوبة وتحديد هذه النقطة بهذه الطريقة احسن من تحديدها بالطريقة السابقة خصوصا اذا كان قوسا الدائرتين التى تكون تلك النقطة عبارة عن تقاطعهما لا يتقاطعان مع كثير من الميل لكن فى صورة ما اذا كانت النقط الاربع ا و ب و س و د واقعة على محيط واحد لا يمكن ان يحصل هذا التحديد بواسطة النقط ا و ب و س فقط لان هذين القوسين يتحدان معا فحينئذ يلزم لاجل التحديد ان نعتبر نقطتان من النقط ا و ب و س مع نقطة رابعة معلومة

ولا يخفى ان هذه العملية نافعة جدا فى ان يبين بها فى اقرب زمن على خرطة عسكرية قليلة التفصيل الاوضاع المختلفة التى يشغلها جيش من الجيوش

وفى الحالة الثانية يفرض انه من نقطة الوضع د لا ترى الا النقطتان ا و ب المعلومتان على الرسم فى ا و ب وان المطلوب تحديد وضع النقطة د اذا علم على البلنشيطة اتجاه المستقيم اب بالنسبة لخط دائرة نصف النهار المغناطيسية

فلاجل ذلك نوجه البلنشيطة الى جهة خط نصف النهار بواسطة البوصلة انظر بند (١٨٦) ثم تحرر العضادة بالتوالى على النقطتين ا و ب بجعل المسطرة تمر على النقطتين المتقابلتين ا و ب من الرسم فالنقطة المطلوبة وهى د تكون تقاطع الشعاعين دا و دب بشرط ان يكون انحراف الابرة المغناطيسية ثابتا على حالة واحدة وهذا واضح ولكن بسبب قبولها

للتغير

للتغير بندران يكون هذا العمل مع سهولته كاحد العملين السابقين فى الصحة
وهذا هو علة كون المهندسين لا يستعملون فى مثل هذه الصورة الآلة
الانحرافية الانادرا

(اخذ صورة الرسم بالبوصلة)

(١٩٠) البوصلة وان كانت لم تصل الى درجة كمال هى الة تفيد المهندس
منافع اعظم من غيرها اذا اراد ان يا خذ بها فى اقرب زمن رسم جميع الاشياء
المعدة لتتميم الاجزاء الصغيرة المرسومة بالبلنشسيطة او اراد معرفة الاوضاع
المختارة للاعداء فى الحرب

وهذه الآلة مركبة مثل الآلة الانحرافية من ابرة مغناطيسية موضوعة
وضعا افقيا على سهم رأسى دقيق جدا ومظروفة فى علبة مربعة فى قاعدتها من
الداخل دائرة من معدن منقسمة الى ٣٦٠ درجة او الى ٤٠٠ درجة
ولا بأس ايضا ان تنقسم الى انصاف درجات وفى قاعدة العلبة من الداخل
خطوط الجهات الاربع الاصلية وخط الشمال والجنوب المرقوم عليه من ٠
الى ١٨٠ او الى ٢٠٠ درجة يكون موازيا لاحد اضلاع العلبة
وملصوق على احد الضلعين الموازيين لخط الشمال والجنوب مسطرة ذات
عضادة او ذات نظارة يمكن بها اخذ كل ميل ممكن بالنسبة للافق بتحريكها
فى مستو عمود على مستوى الحافة المرسوم عليه الدرجات والبوصلة تكون
متحركة على ركبة متبشقة متصلة ببسيية ويمكن فصلها من العلبة لاستعمالها
مثل الآلة الانحرافية

واذا رصدنا بالبوصلة لزم ان يكون وضعها افقيا وان يكون توجه النظر دائما
الى جهة واحدة لمنع الخطا يعنى انك توجه دائما المسطرة على يسارها او على
يمينها ثم بعد ذلك تعد الدرجات المثبتة على التوالى من ٠ الى ٤٠٠
درجة ولا يخفى انه عند النظر داخل المسطرة ينبغى ان تجعل المنظر هو الثقب
الصغير الذى فى طرفها وتجعل مقابل المنظر اللسان المقابل

واغلب البوصلات القديمة منمرة من جهتى خط الشمال والجنوب من ٠ الى

٣٦٠ درجة فحينئذ يلزم ان يبين على المسودة كون الزاوية المرصودة في شرق او غرب خط الشمال والجنوب من البوصلة وهذا الامر لازم جدا بحيث ان عمل التبييض لا يمكن بدونه فحينئذ مذهب التقسيم المئيني هو المختار

ولا حاجة هنا لتطويل الكلام على البوصلة لان جميع ما تقدم يطابق ماهنا ولكن لاجل ان يميز في بعض الاشياء النسبة بين هذه الآلة والبلنشيطة المتوجهة بواسطة الآلة الانحرافية يلزم ان نحل ثانيا القضيتين العمليتين السابقتين فنقول :

(١٩١) طريقة اخذ رسم المضلع اب س د ى ف الذى جميع نقطه يمكن الوصول اليها كما في (شكل ١٤٦)

ان تضع البوصلة وضعا افقيا في النقطة ا وتديرها على سهمها حتى تكون النقطة ب مقابلة للغرض او لمحور النظارة فالابرة بعد حركتها الاضطرابية تتجه الى الجهة الشمالية فحينئذ اذا عددنا على مقتضى الترتيب الطبيعي لنمر التقسيم الدرجات الستينية او المئينية الداخلة بالابتداء من الخط اب الشعاعى او قلنا والمعنى واحد من ٠ من خط الشمال والجنوب الى الطرف الشمالى من الابرة تحصل معنا قياس الزاوية الحادثة من اتجاه اب وخط نصف النهار المغناطيسى

ومتى كانت مقادير الزوايا الماخوذة على الارض ليست منقولة حالا بواسطة المقياس والمنقلة المذكورين في بند (١٠١) و (١١٥) فانه يعمل مسودة الرسم الذى عليه يكتب جميع هذه المقادير ولكن في بعض الاحيان لدفع الاختلاط تقيد الزوايا المرصودة في نقطة واحدة في جهة وحدها وتوضع حينئذ حروف او نمر لاجل المراجعة عند التبييض فلنفرض ان ا ـ سـ الخ هي المسودة المذكورة فنكتب حينئذ في النقطة ا عدد الدرجات المئينية الموجودة في الوضع ا ونفرض ان الخط ا ـ من المسودة عبارة عن الخط اب الارضى ويكتب ايضا على الخط ا ـ

بعدد الامتار الداخلة فى ا ب وكذلك توضع البوصلة وضعا افقيا فى النقطة ب ويرصد ميل المستقيم ب س مع الاهتمام بان يكتب هذا الميل فى النقطة ب من المسودة وهكذا يستمر على هذه الطريقة الى ان ترجع الى الوضع الاول ا

واحدى الطرق التى يختبر بها صحة قياس الزوايا وعدمها هى ان تنظر هل الزوايا الداخلة من المضلع يصنع مجموعها من الزاويتين القائمتين بقدر عدة اضلاعه الا اثنين ام لا انظر بند (٤٤) لكن كيف نعرف كل واحدة من هذه الزوايا حيث لم تكن مرصودة حالا وجواب ذلك سهل وهو ان اتجاهات الابرة المغناطيسية حيث كانت مفروضة متوازية بالنسبة لجميع نقط الرسم تكون الزاوية ا ب س مثلا مساوية للزاوية ش ا ب + ح ب س لكن ش ا ب = ٤٠٠ ــ ٣٥٥ = ٤٥ درجة مئينية و ح ب س = ٣٠٩ ــ ٢٠٠ = ١٠٩ درجات مئينية فاذن ا ب س = ٤٥ + ١٠٩ = ١٥٤ درجة مئينية وهكذا الزوايا الاخرى

واما امتحان صحة الاضلاع فانه لايمكن الا بعمل المضلع بواسطة المنقلة ومقياس الرسم فينظر حينئذ هل الشكل يقفل ام لا ولاجل تنجيز هذا العمل باسهل الطرق واصحها يرسم على الورقة عدة عظيمة من الخطوط المتوازية التى تكون عبارة عن اتجاهات الابرة المغناطيسية وتستعمل فى تعيين وضع المنقلة فى سائر نقط الرسم على اختلافها

والطريقة السابقة تستعمل مع النجاح فى اخذ رسم مجارى الانهر وانعطافات الطرق ودوائر الاملاك الصغيرة وجملة بيوت مستقلة وبالجملة فهى تستعمل لرسم جميع التفاصيل الدقيقة التى لايمكن رسمها الا بالبلنشيطة مع الصعوبة او البطء ولكن كل مارسم بالنظر او بواسطة البوصلة يلزم حالا ان ينقل على البلنشيطة تفاصيله التى تحصلت لمعرفة حقيقة شكل الارض التى لم تزل نصب العين او التى اثرها باق فى البال على اصله بل يلزم ايضا فى كل ليلة تسويد

مارسم على البلنشيطة بجبر الشين لئلا ينمحى مارسم اولا

(١٩٢) حيث ان جميع خطوط انصاف النهار المغناطيسية يمكن اعتبارها متوازية فى مسافة صغيرة ينتج انه ليس من الضرورى ان تعمل اوضاع فى رأس كل زاوية من زوايا المضلع المطلوب اخذ رسمه * فانه يمكن ان يستغنى عن الرصد فى ب لاننا اذا عرفنا ميل ب س على خط نصف النهار ج ش تحصل معنا ميل هذا الضلع بالنسبة لخط نصف نهار ب وذلك لان الزوايا الداخلة من جهة واحدة حيث ان كل زاوية منها متممة للاخرى كما فى بشد (٢٩) فعدة الدرجات المئينية الموجودة فى النقطة س تختلف عما تحصل فى النقطة ب بقدر ٢٠٠ درجة مئينية فحينئذ متى اردنا عند عمل الشكل ان نحدد فى النقطة ـ الاتجاه ـ س ـ بواسطة الرصد الواقع فى س لزم ان نأخذ على المنقلة النمرة المقابلة بالمقاطرة للنقطة الموجودة فى ـ وبهذه الطريقة تصير عدة الاوضاع قليلة

وينتج ايضا من الخاصية المذكورة انه يمكن ان يرسم من نقطة ايا كانت مثل ب خط موازللخط اس ولاجل ذلك يرصد فى ا ميل الخط اس ثم توضع البوصلة فى النقطة ب مثل وضعها فى نقطة ا فحينئذ المسطرة ب خ تكون موازية للخط اس ويعلم ايضا كيف يصنع الانسان فى اخراج عمود على خط من نقطة مفروضة عليه او خارجة عنه

(١٩٣) اذا فرضنا ان النقطتين ا و ب من الارض كما فى (الشكل ١٤٧) هما ا و ب على الخرطة وعلمنا اتجاه الابرة المغناطيسية بالنسبة للمستقيم ا ب فكيف نحدد على الخرطة النقطة ق

وطريق ذلك ان نقيس فى ق ميل الشعاعين ق ا و ق ب النظريين بالنسبة لخط نصف النهار المغناطيسى ونرسم على ا ب من الخرطة بواسطة المنقلة خطوط انصاف نهار ح ش و ح ش الخ فاذا تم هذا واردنا ان نعين ميل ا ق بالنسبة للخط ح ش المار بالنقطة ا اخذنا كما تقدم النمرة المقابلة بالمقاطرة للنمرة الموجودة فى ق ومثل ذلك نفعل بالنسبة للخط ق ب

فالتقاطع

فالتقاطع و لهذين الخطين يكون هو النقطة المطلوبة
فاذا كان المعلوم اكثر من نقطتين فالمناسب لامتحان العملية ان يرسم اشعة اخرى نظرية على الخرطة فهذه الاشعة الجديدة تمر ايضا بالنقطة و ان لم يحصل خطأ فى العمل الاول او فى غيره من الاعمال
وهذه الطريقة تجرى كغيرها فى الرسم المعلوم منه بعض نقط كرؤس الجبال والارتفاعات الارضية ومبادى الانحدارات ونهاياتها وغير ذلك لكن هذه التحديدات الهندسية لا تكفى بل يلزم ايضا لاجل معرفة اختلاف اشكال الارض ان يعلم بخطوط لطيفة بالريشة اتجاه خطوط اكبر الانحدارات يعنى المنحنيات التى ترسمها المياه وجميع الاجسام الثقيلة على سطوح الجبال والسهول المائلة او يعلم بخطوط متواصلة الطبقات الافقية المتساوية الابعاد او منحنيات التسوية المحدودة بعملية التسوية والتى بمقتضاها يمكن ان يتصور الانسان على وجه موافق للطبع جميع عوارض الارض وبالجملة فالمناسب ان يرسم مع اللطف والنظافة على وفق اصول رسم التقليد طبق الاصطلاحات السائرة جميع ما يلزم فى تركيب خرطة طوبوغرافية معلومة النفع

(اخذ رسم الاماكن بدائرة المساح)

(١٩٤) دائرة المساح يصعب العمل بها غالبا فى اخذ صورة ارض كثيرة التضاريس والعوارض ويمكن استعمالها فى ارض سهلة ليس بها هذه الموانع
وهذه الآلة فى العادة دائرة من نحاس طول نصف قطرها من تسع سنتمترات الى عشر اى اجزاء من مائة من المتر ومنقسمة الى اربع اجزاء متساوية بخطين متقاطعين على زوايا قائمة وقائم على نهاياتها اربع هدفات اعمدة على حافتها او مثبتة او ممسوكة ببرم وهذه الدائرة مركبة مثل البوصلة على ساق ذى ثلاثة ارجل ويرصد بها كما يرصد بمساطر البلنشيطات ومن اللازم جدا ان الهدفات الاربع تكون كلها اعمدة على الافق عند العمل لانه بدون ذلك

يفسد اتجاه المستقيم الذى يرسم على الارض المنحدرة فى اتجاه الهدفتين المائلتين كما هو ظاهر لمن اراد ان يتحقق ذلك

فحتى اردنا ان ناخذ صورة قطعة ارض بالدائرة المذكورة فاننا نرسم فى داخلها على طولها مستقيما يسمى قاعدة او خط التحرير وتنزل من جميع زوايا محيطها اعمدة على هذه القاعدة ونقيس هذه الاعمدة بالجنزير او بضعف المتر او بالخطوة ان لم يكن الغرض الا رسم الارض تقريبا ويقاس بهذه الكيفية جميع اجزاء القاعدة وينتج من هذا ان قطعة الارض تنحل الى مثلثات واشباه منحرفات ومستطيلات وانه يمكن بالسهولة تقدير سعتها السطحية وعمل التبييض بالطريقة المذكورة فى نمرة (١٠٠)

فاذا كان الغرض قياس قطعة ارض لا يمكن الوصول الى داخلها لكن محيطها خال من الموانع فانه يرسم عليه مثلث او مستطيل اى مضلع ذو زوايا قائمة او شبه منحرف او اى مضلع

ولنذكر طريقة العمل بالدائرة فى استخراج موقع العمود الذى تريد تنزيله على خط فنقول * لاجل تعيين النقطة د التى هى موقع العمود النازل من رأس الزاوية ب على قاعدة اس كما فى (شكل ١٤٨) نضع مركز الآلة قريبا من د بتوجيه هدفتى الآلة المتقابلتين على استقامة الخط اس وتنظر هل النقطة ب توجد فى اتجاه الهدفتين الاخريين ام لا لكن هذه النقطة قد تكون فى يسار هذا الاتجاه او فى يمينه ما لم يكن هناك مانع فاذا كانت فى اليسار مثلا فان الآلة تؤخر بالقدر المناسب الى النقطة ا ويعاد الامتحان ثانيا بتكرير هذه العملية مرارا حتى يمر شعاع الهدفتين بالنقطة ب فبعد عدة مرات يوجد مركز الآلة فى النقطة د

م(١٩٥) لا حاجة للكلام على اخذ الرسم بالنظر لانه لا يمكن اكتساب معرفته الا باستعمال الآلة المتقدمة ويتأكد لمن الزم بكشف عسكرى سريعا ان يتعلم اخذ رسم الارض بواسطة النظر وان يبرع فى اصول صناعه الحرب ليصور على الخرطة الاشياء التى يريد رئيس العسكر معرفتها التحقيق

النجاح لجيشه اولتحفظه من هجوم الاعداء عليه

(الفصل الثالث)

فى نبذة مختصرة فى بعض طرق رسمية مستعملة فى نقل الرسوم ونقلها بقياس مختصر

(١٩٦) اذا فرضنا انه يلزم نقل رسم مع بقاء مقداره فانه يرسم مربع فى الدائر ثم تحدد بالتقاطعات اوضاع النقط الاصلية كما فى نمرة (٨٥) يعنى اننا نعمل على النسخة المطلوب نقلها مثلثات مساوية للمثلثات التى تتوهم او التى ترسم بقلم الرصاص على النسخة الأصلية ثم بعد ذلك لاجل رسم خطوط منحنية نستعمل طريقة نمرة (١٨٤) فاذا كان معنا عدة خطوط مستقيمة فانه يمكن ايضا تعيين اوضاعها بتوهم انها ممتدة الى خطوط محيط المربع وبذلك نعلم على النسخة الجديدة نقط تقاطع هذه الخطوط بعينها

وعوضا عن استعمال هذه الطريقة التى هى طويلة جدا خصوصا اذا كان الرسم مشتملا على كثير من التفاصيل نضع على الرسم لوحا من زجاج ملاصقا له ان امكن ذلك اونضع عليه ورقة شفافة اومزيتة ثم تنقل على فرخ من ورق الفلمنك ولكن مع المحافظة على ان نصحح بقلم الرصاص اجزاء الرسم الثانى الذى يمكن ان تختل بهذا العمل الثانى لكن اذا كانت الخطوط المرسومة بحبر الشين على الورق الشفاف لا تظهر ظهورا كافيا من خلف النسخة فاننا نأخذ من ناعم معدن الرصاص وندلك به وجها من الورق الشفاف ويكون ذلك الوجه مقابلا للوجه الذى عليه الرسم ويثبت هذا الناعم بالدلك الخفيف بقطعة ورق او بخرقة صغيرة ثم نفرش على الورق المعد للرسم الفرخ المهيأ بهذه الكيفية ويكون الوجه المدلوك بالرصاص ملاصقا للورق ثم نتبع بقلم النقل جميع خطوط النسخة الاولى مع الاتكاء الكافى بحيث يمكن ان يلتصق معدن الرصاص على الورق الفلمنكى وبهذه الطريقة يتحصل معنا على وجه الصحة ثانى نقل من النسخة الاصلية وهذا العمل يسمى نقل الرسم

ولنفرض على العموم ان نسبة خطوط النسخة الجديدة لخطوط الاصل كنسبة م : ن كما فى (شكل ١٤٩) فنفرض ان الاصل ا ب س د ونرسم عليه عدة كثيرة من المربعات الصغيرة مع الدقة بقلم الرصاص ثم نرسم مستطيلا ا ـ ـ ى مشابها للاول بحيث تكون نسبة ا ب : ا ـ :: ا س : ا ـ :: م : ن انظر بند (٩٧) ثم بعد ذلك نرسم فى كل مربع صغير من المستطيل ا ـ ـ ى جميع الاشياء الموجودة فى المربعات المناظرة لها من الاصل ولاجل ذلك يمكن استعمال طريقة التقاطعات بان نحول جميع الابعاد المأخوذة على الاصل بشرط ان تكون على نسبة م : ن كما فى (شكل ١٥٠) ولاجل عمل هذه التحويلات نستعمل عادة الزاوية المحولة فنفرض مثلا ان المثلث ا ى ـ متساوى الساقين وان ا ى = ا ـ = م ثم ى ـ = ن فحينئذ اذا كان ا ـ المساوى ا ـ خطا ايا كان من الاصل فان مختصره المحول يكون عبارة عن الخط ـ ـ ويمكن ايضا ان ننقل جميع النقط الداخلة فى كل مربع على حسب ابعادها عن ضلعين من اضلاع هذا المربع فاذا كان الاصل نفيسا جدا لا يراد ان يرسم عليه المربع ا ب س د لزم لاجل حفظه تغطيته بورقة مدهونة او بمرآة يرسم عليها هذا المربع

فاذا كانت نسبة سطحى الشكلين كنسبة ط : ن كانت حينئذ مربعات اضلاعهما المتناظرة مناسبة لهذين السطحين فاذا اشرنا بالحرف ا لاحد خطوط الاصل وبالحرف ا للخط المناظر له من النسخة الجديدة تحصل

ط : ن :: ا٢ : ا٢ ومنه ينتج ان ا = $\sqrt{\frac{ن ا^2}{ط}}$ فحينئذ ا يكون وسطا متناسبا بين ا و $\frac{ن ا}{ط}$

وهاك عملا هندسيا يحل هذه المسئلة الاخيرة

وهو ان ترسم على ا ـ كما فى (شكل ١٥١) باعتباره قطرا مساويا ط + ن نصف محيط ومن النهاية ف من جزء ا ف = ط تقيم ف ى

عمودا

عموداعلى اب ثم ترسم مستقيمين د اش و دك غير محدودين فحينئذ يقال حيث كان مربعا الوترين اد و بد على نسبة كالنسبة الواقعة بين الجزئين اف و بف اوكنسبة ط : ن انظر بند (٥٤) كان من المعلوم اننا اذا اخذنا الخط دش مساويا للخط ايا كان من الاصل ورسمنا من النقطة ش الخط شك موازيا اب كان المستقيم دك هو الخط المناظر من النسخة الجديدة

والاسهل من ذلك ايضا ان تعمل اولا مقياس النسخة الجديدة وتستعمله فى التفاصيل الصغيرة لتحويل الابعاد المأخوذة على الاصل كما فى بند (١٠١) وهذا العمل سهل للرسوم المتعلقة بالمصالح العامة بسبب ان مقاييسها على نسبة معينة لكن حينئذ لا يمكن فى الاغلب ان يقع تحويل الرسوم منفردة الا اذا كان المراد جمعها حين تكون عبارة عن اشياء قابلة للالتئام مثل تفاصيل الدواليب والآلات او التفاصيل التى يتكون منها خرطة بلدة مرسومة على عدة اوراق بمقتضى مقاييس مختلفة

وهذه الطرق المختلفة فى نقل الرسوم او تحويلها وان كانت سهلة فى حد ذاتها الا انها غير مستعملة فى الخرط التى محيطاتها كثيرة الانعطافات وتفاصيلها كثيرة اما لكثرة الاعمال التى تقتضيها واما لطول الزمن الذى يلزم لها لاجل تحصيل ما يمكن من الصحة ولذلك يستعمل فى مثل هذه الصورة آلة البنطغرافة التى وظيفتها ان ينسخ بها مع السرعة كل نوع من انواع الرسم لكن لاجل ان تكون هذه النسخ موثوقا بها بالكلية يلزم ان تكون هذه البنطغرافة محررة تحريرا صحيحا ويستعملها الانسان مع الاحتياط والخفة

وقد تم تحرير هذا المختصر وتصحيحه * ومقابلته على اصله وتنقيحه * وازالة ما كان فى الاصل من التعميات * والعدول عما فيه من سخيف الاصطلاحات * على يد بعض خوجات مدرسة مهندسخانة الخديويه * جعلها الله عامرة آهلة بهية * وذلك تحت نظارة من ناداه السعد بلبيك * حضرة الامير على بيك * وكان تمام طبعه بمطبعة هذه المدرسه * التى هى على اساطين المعارف مؤسسه * فى اوائل شوال المعظم الذى هو من شهور سنة ١٢٧٠ من هجرة من له العز والشرف صلى الله وسلم عليه وعلى اله وصحبه وسلم

امين

تم